BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Session 2021

MATHÉMATIQUES

Mardi 8 juin 2021

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 8 pages numérotées de 1/8 à 8/8

Le candidat traite **4 exercices** : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche même incomplètes ou infructueuses seront valorisées.

EXERCICE 1 commun à tous les candidats (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).
Pour chaque question, trois affirmations sont proposées, une seule de ces affirmations est exacte.
Le candidat recopiera sur sa copie le numéro de chaque question et la lettre de la réponse choisie pour celle-ci.
AUCUNE JUSTIFICATION n'est demandée. Une réponse fausse ou l'absence de réponse n'enlève aucun point.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - 2x - 1)\mathrm{e}^x$.

   A. La fonction dérivée de f est la fonction définie par $f'(x) = (2x - 2)\mathrm{e}^x$.

   B. La fonction f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 2]$.

   C. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

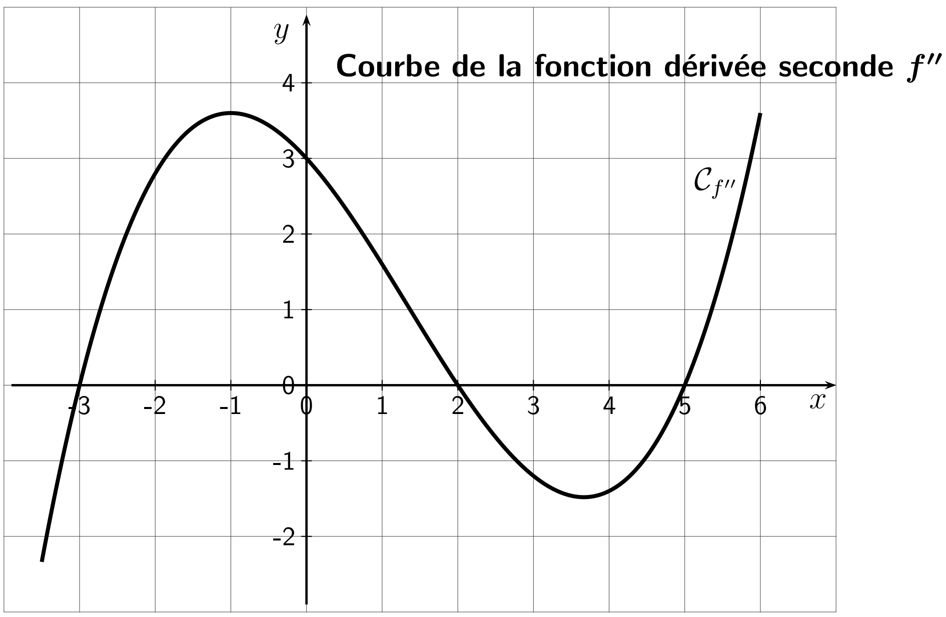
2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3}{5 + \mathrm{e}^x}$.
   Sa courbe représentative dans un repère admet :

   A. une seule asymptote horizontale ;

   B. une asymptote horizontale et une asymptote verticale ;

   C. deux asymptotes horizontales.

3. On donne ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_{f''}$ représentant la fonction dérivée seconde f'' d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[-3{,}5\,; 6]$.



   A. La fonction f est convexe sur l'intervalle $[-3\,; 3]$.

   B. La fonction f admet trois points d'inflexion.

   C. La fonction dérivée f' de f est décroissante sur l'intervalle $[0\,; 2]$.

4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - 17n + 20$.

   A. La suite (u_n) est minorée.

   B. La suite (u_n) est décroissante.

   C. L'un des termes de la suite (u_n) est égal à 2021.

5. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}75u_n + 5$.
   On considère la fonction « seuil » suivante écrite en Python :

```
def seuil() :
  u=2
  n=0
  while u<45 :
    u=0.75*u+5
    n=n+1
  return n
```

   Cette fonction renvoie :

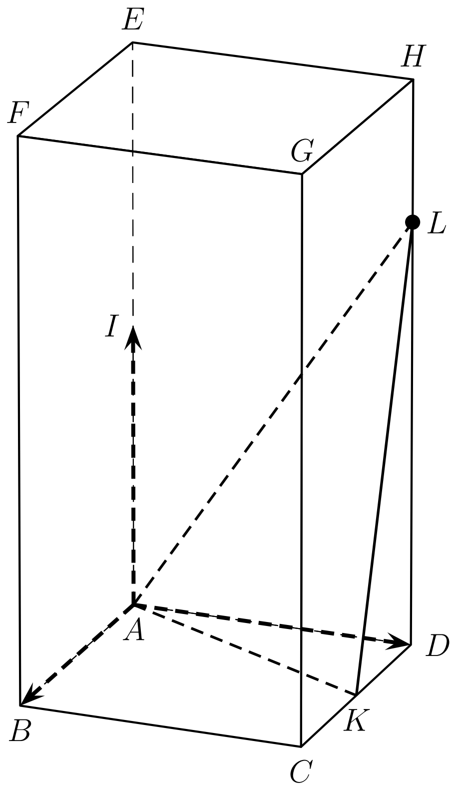
   A. la plus petite valeur de n telle que $u_n \geq 45$;

   B. la plus petite valeur de n telle que $u_n < 45$;

   C. la plus grande valeur de n telle que $u_n \geq 45$.

EXERCICE 2 commun à tous les candidats (5 points)

On considère un pavé droit $ABCDEFGH$ tel que $AB = AD = 1$ et $AE = 2$, représenté ci-dessous.
Le point I est le milieu du segment $[AE]$. Le point K est le milieu du segment $[DC]$. Le point L est défini par : $\overrightarrow{DL} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AI}$. N est le projeté orthogonal du point D sur le plan (AKL).



On se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AI})$.

On admet que le point L a pour coordonnées $\left(0; 1; \dfrac{3}{2}\right)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AL}$.
2. (a) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(6; -3; 2)$ est un vecteur normal au plan (AKL).
   (b) En déduire une équation cartésienne du plan (AKL).
   (c) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par D et perpendiculaire au plan (AKL).
   (d) En déduire que le point N de coordonnées $\left(\dfrac{18}{49}; \dfrac{40}{49}; \dfrac{6}{49}\right)$ est le projeté orthogonal du point D sur le plan (AKL).

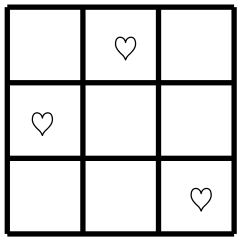
On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ d'un tétraèdre est donné par la formule :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \text{(aire de la base)} \times \text{hauteur}$$

3. (a) Calculer le volume du tétraèdre $ADKL$ en utilisant le triangle ADK comme base.
   (b) Calculer la distance du point D au plan (AKL).
   (c) Déduire des questions précédentes l'aire du triangle AKL.

EXERCICE 3 commun à tous les candidats (5 points)

Une société de jeu en ligne propose une nouvelle application pour smartphone nommée « Tickets coeurs ! ».
Chaque participant génère sur son smartphone un ticket comportant une grille de taille 3×3 sur laquelle sont placés trois cœurs répartis au hasard, comme par exemple ci-dessous.



Le ticket est gagnant si les trois cœurs sont positionnés côte à côte sur une même ligne, sur une même colonne ou sur une même diagonale.

1. Justifier qu'il y a exactement 84 façons différentes de positionner les trois cœurs sur une grille.
2. Montrer que la probabilité qu'un ticket soit gagnant est égale $\dfrac{2}{21}$.
3. Lorsqu'un joueur génère un ticket, la société prélève 1€ sur son compte en banque. Si le ticket est gagnant, la société verse alors au joueur 5€. Le jeu est-il favorable au joueur ?
4. Un joueur décide de générer 20 tickets sur cette application. On suppose que les générations des tickets sont indépendantes entre elles.
   (a) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui compte le nombre de tickets gagnants parmi les 20 tickets générés.
   (b) Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3}, de l'événement $(X = 5)$.
   (c) Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3}, de l'événement $(X \geq 1)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE au choix du candidat (5 points)

Le candidat doit traiter UN SEUL des deux exercices A ou B.
Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.

EXERCICE - A

Principaux domaines abordés
— Suites
— Équations différentielles

Dans cet exercice, on s'intéresse à la croissance du bambou Moso de taille maximale 20 mètres. Le modèle de croissance de Ludwig von Bertalanffy suppose que la vitesse de croissance pour un tel bambou est proportionnelle à l'écart entre sa taille et la taille maximale.

Partie I : modèle discret

Dans cette partie, on observe un bambou de taille initiale 1 mètre.
Pour tout entier naturel n, on note u_n la taille, en mètre, du bambou n jours après le début de l'observation. On a ainsi $u_0 = 1$.
Le modèle de von Bertalanffy pour la croissance du bambou entre deux jours consécutifs se traduit par l'égalité :

$$u_{n+1} = u_n + 0{,}05(20 - u_n) \text{ pour tout entier naturel } n.$$

1. Vérifier que $u_1 = 1{,}95$.
2. (a) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}95u_n + 1$.
   (b) On pose pour tout entier naturel n, $v_n = 20 - u_n$. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le terme initial v_0 et la raison.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 20 - 19 \times 0{,}95^n$.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Partie II : modèle continu

Dans cette partie, on souhaite modéliser la taille du même bambou Moso par une fonction donnant sa taille, en mètre, en fonction du temps t exprimé en jour. D'après le modèle de von Bertalanffy, cette fonction est solution de l'équation différentielle

$$(E) \quad y' = 0{,}05(20 - y)$$

où y désigne une fonction de la variable t, définie et dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et y' désigne sa fonction dérivée.

Soit la fonction L définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $L(t) = 20 - 19e^{-0{,}05t}$.

1. Vérifier que la fonction L est une solution de (E) et qu'on a également $L(0) = 1$.
2. On prend cette fonction L comme modèle et on admet que, si on note L' sa fonction dérivée, $L'(t)$ représente la vitesse de croissance du bambou à l'instant t.
   (a) Comparer $L'(0)$ et $L'(5)$.
   (b) Calculer la limite de la fonction dérivée L' en $+\infty$. Ce résultat est-il en cohérence avec la description du modèle de croissance exposé au début de l'exercice ?

EXERCICE - B

Principaux domaines abordés
— Suites, étude de fonction
— Fonction logarithme

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par $f(x) = x - \ln(x-1)$.
On considère la suite (u_n) de terme initial $u_0 = 10$ et telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

Partie I :

La feuille de calcul ci-dessous a permis d'obtenir des valeurs approchées des premiers termes de la suite (u_n).

	A	B
1	n	u_n
2	0	10
3	1	7,80277542
4	2	5,88544474
5	3	4,29918442
6	4	3,10550913
7	5	2,36095182
8	6	2,0527675
9	7	2,00134509
10	8	2,0000009

1. Quelle formule a été saisie dans la cellule B3 pour permettre le calcul des valeurs approchées de (u_n) par recopie vers le bas ?
2. À l'aide de ces valeurs, conjecturer le sens de variation et la limite de la suite (u_n).

Partie II :

On rappelle que la fonction f est définie sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par $f(x) = x - \ln(x-1)$.

1. Calculer $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$. On admettra que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
2. (a) Soit f' la fonction dérivée de f. Montrer que pour tout $x \in]1\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$.
   (b) En déduire le tableau des variations de f sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$, complété par les limites.
   (c) Justifier que pour tout $x \geq 2$, $f(x) \geq 2$.

Partie III :

1. En utilisant les résultats de la partie II, démontrer par récurrence que $u_n \geq 2$ pour tout entier naturel n.
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note L sa limite.
4. On admet que L vérifie $f(L) = L$. Donner la valeur de L.