# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

**SESSION 2021**

# MATHÉMATIQUES

## Jour 2

Durée de l'épreuve : **4 heures**

*L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.*
*L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.*

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 9 pages numérotées de 1/9 à 9/9.

Le candidat traite **4 exercices** : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

*Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.*
*La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses seront valorisées.*

## EXERCICE 1 commun à tous les candidats (5 points)

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 10\,000$ et pour tout entier naturel $n$ :

$$u_{n+1} = 0{,}95\, u_n + 200.$$

**1.** Calculer $u_1$ et vérifier que $u_2 = 9\,415$.

**2.**

- **a.** Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel $n$ :

$$u_n > 4\,000.$$

- **b.** On admet que la suite $(u_n)$ est décroissante. Justifier qu'elle converge.

**3.** Pour tout entier naturel $n$, on considère la suite $(v_n)$ définie par : $v_n = u_n - 4\,000$.

- **a.** Calculer $v_0$.
- **b.** Démontrer que la suite $(v_n)$ est géométrique de raison égale à 0,95.
- **c.** En déduire que pour tout entier naturel $n$ :

$$u_n = 4\,000 + 6\,000 \times 0,95^n.$$

- **d.** Quelle est la limite de la suite $(u_n)$ ? Justifier la réponse.

**4.** En 2020, une espèce animale comptait 10 000 individus. L'évolution observée les années précédentes conduit à estimer qu'à partir de l'année 2021, cette population baissera de 5 % chaque début d'année.
Pour ralentir cette baisse, il a été décidé de réintroduire 200 individus à la fin de chaque année, à partir de 2021.
Une responsable d'une association soutenant cette stratégie affirme que : « l'espèce ne devrait pas s'éteindre, mais malheureusement, nous n'empêcherons pas une disparition de plus de la moitié de la population ».
Que pensez-vous de cette affirmation ? Justifier la réponse.

## EXERCICE 2 commun à tous les candidats (5 points)

Un test est mis au point pour détecter une maladie dans un pays.

Selon les autorités sanitaires de ce pays, 7 % des habitants sont infectés par cette maladie.

Parmi les individus infectés, 20 % sont déclarés négatifs.

Parmi les individus sains, 1 % sont déclarés positifs.

Une personne est choisie au hasard dans la population.

On note :

- M l'évènement : « la personne est infectée par la maladie » ;
- T l'évènement : « le test est positif ».

**1.** Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.

**2.**

- **a.** Quelle est la probabilité pour que la personne soit infectée par la maladie et que son test soit positif ?
- **b.** Montrer que la probabilité que son test soit positif est de 0,0653.

**3.** On sait que le test de la personne choisie est positif.
Quelle est la probabilité qu'elle soit infectée ?
On donnera le résultat sous forme approchée à $10^{-2}$ près.

**4.** On choisit dix personnes au hasard dans la population. La taille de la population de ce pays permet d'assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
On note $X$ la variable aléatoire qui comptabilise le nombre d'individus ayant un test positif parmi les dix personnes.

- **a.** Quelle est la loi de probabilité suivie par $X$ ? Préciser ses paramètres.
- **b.** Déterminer la probabilité pour qu'exactement deux personnes aient un test positif.
  On donnera le résultat sous forme approchée à $10^{-2}$ près.

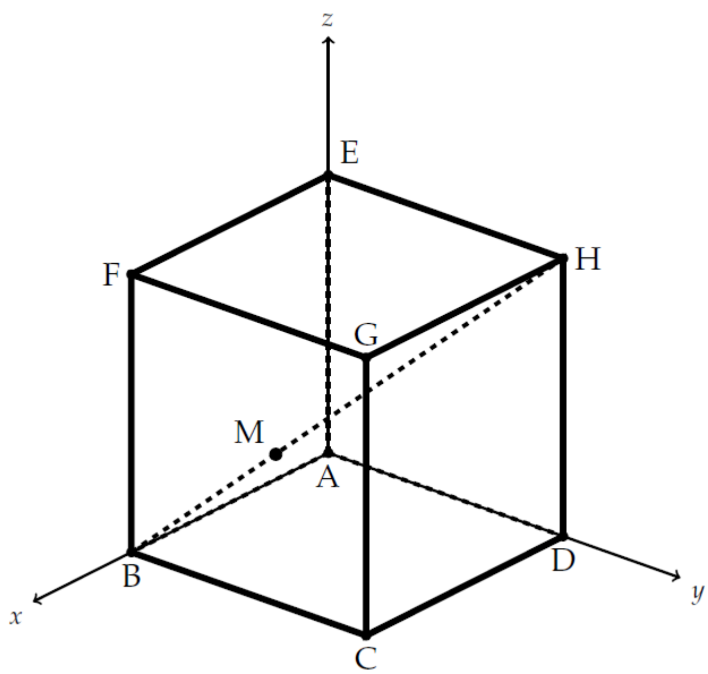
**5.** Déterminer le nombre minimum de personnes à tester dans ce pays pour que la probabilité qu'au moins une de ces personnes ait un test positif, soit supérieure à 99 %.

## EXERCICE 3 commun à tous les candidats (5 points)

Dans l'espace, on considère le cube ABCDEFGH d'arête de longueur égale à 1.

On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

On considère le point M tel que $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{BH}$.




**1.** Par lecture graphique, donner les coordonnées des points B, D, E, G et H.

**2.**

- **a.** Quelle est la nature du triangle EGD ? Justifier la réponse.
- **b.** On admet que l'aire d'un triangle équilatéral de côté $c$ est égale à $\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$.

  Montrer que l'aire du triangle EGD est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

**3.** Démontrer que les coordonnées de M sont $\left(\frac{2}{3}\,;\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$.

**4.**

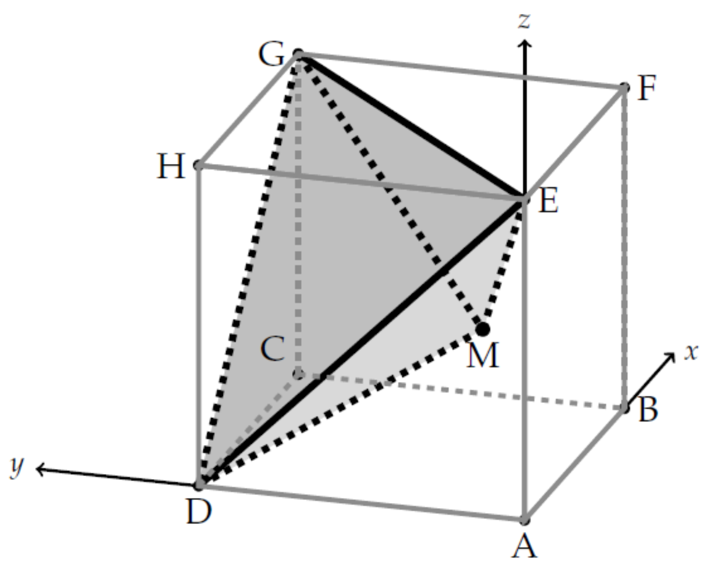
- **a.** Justifier que le vecteur $\vec{n}(-1\,;1\,;1)$ est normal au plan (EGD).
- **b.** En déduire qu'une équation cartésienne du plan (EGD) est : $-x + y + z - 1 = 0$.

**c.** Soit $\mathcal{D}$ la droite orthogonale au plan (EGD) et passant par le point M.

Montrer qu'une représentation paramétrique de cette droite est :

$$\mathcal{D}: \begin{cases} x = \frac{2}{3} - t \\ y = \frac{1}{3} + t\,, \quad t \in \mathbf{R}. \\ z = \frac{1}{3} + t \end{cases}$$

**5.** Le cube ABCDEFGH est représenté ci-dessus selon une vue qui permet de mieux percevoir la pyramide GEDM, en gris sur la figure :




Le but de cette question est de calculer le volume de la pyramide GEDM.

**a.** Soit K, le pied de la hauteur de la pyramide GEDM issue du point M.

Démontrer que les coordonnées du point K sont $\left(\frac{1}{3}\,;\frac{2}{3}\,;\frac{2}{3}\right)$.

**b.** En déduire le volume de la pyramide GEDM.

*On rappelle que le volume $V$ d'une pyramide est donné par la formule $V = \frac{b \times h}{3}$ où $b$ désigne l'aire d'une base et $h$ la hauteur associée.*

## EXERCICE au choix du candidat (5 points)

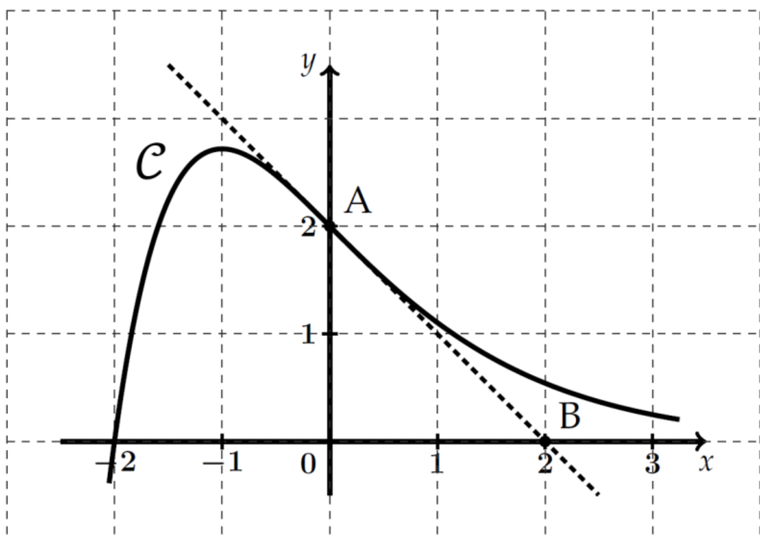
**Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B.**
**Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.**
**Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés par chaque exercice sont indiqués dans un encadré.**

### EXERCICE – A

| **Principaux domaines abordés : Fonction exponentielle, convexité, dérivation, équations différentielles.** |
|---|

Cet exercice est composé de trois parties indépendantes.

On a représenté ci-dessous, dans un repère orthonormé, une portion de la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction $f$ définie sur $\mathbf{R}$ :




On considère les points A$(0\,;2)$ et B$(2\,;0)$.

## Partie 1

Sachant que la courbe $\mathcal{C}$ passe par A et que la droite (AB) est la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A, donner par lecture graphique :

**1.** La valeur de $f(0)$ et celle de $f'(0)$.

**2.** Un intervalle sur lequel la fonction $f$ semble convexe.

## Partie 2

On note $(E)$ l'équation différentielle $y' = -y + \mathrm{e}^{-x}$.

On admet que $g: x \mapsto x\mathrm{e}^{-x}$ est une solution particulière de $(E)$.

**1.** Donner toutes les solutions sur **R** de l'équation différentielle $(H) : y' = -y$.

**2.** En déduire toutes les solutions sur **R** de l'équation différentielle $(E)$.

**3.** Sachant que la fonction $f$ est la solution particulière de $(E)$ qui vérifie $f(0) = 2$, déterminer une expression de $f(x)$ en fonction de $x$.

## Partie 3

On admet que pour tout nombre réel $x$, $f(x) = (x + 2)\,\mathrm{e}^{-x}$.

**1.** On rappelle que $f'$ désigne la fonction dérivée de la fonction $f$.

- **a.** Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = (-x - 1)\,\mathrm{e}^{-x}$.
- **b.** Étudier le signe de $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ et dresser le tableau des variations de $f$ sur **R**.

  On ne précisera ni la limite de $f$ en $-\infty$ ni la limite de $f$ en $+\infty$.

  On calculera la valeur exacte de l'extremum de $f$ sur **R**.

**2.** On rappelle que $f''$ désigne la fonction dérivée seconde de la fonction $f$.

- **a.** Calculer pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f''(x)$.
- **b.** Peut-on affirmer que $f$ est convexe sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ ?

## EXERCICE – B

| **Principaux domaines abordés : Fonction logarithme népérien, dérivation.** |
|---|

Cet exercice est composé de deux parties.

Certains résultats de la première partie seront utilisés dans la deuxième.

### Partie 1 : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[1\,;4]$ par : $f(x) = -30x + 50 + 35\ln x$.

**1.** On rappelle que $f'$ désigne la fonction dérivée de la fonction $f$.

**a.** Pour tout nombre réel $x$ de l'intervalle $[1\,;4]$, montrer que :

$$f'(x) = \frac{35 - 30x}{x}.$$

**b.** Dresser le tableau de signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1\,;4]$.

**c.** En déduire les variations de $f$ sur ce même intervalle.

**2.** Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, notée $\alpha$, sur l'intervalle $[1\,;4]$ puis donner une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-3}$ près.

**3.** Dresser le tableau de signe de $f(x)$ pour $x \in [1\,;4]$.

### Partie 2 : Optimisation

Une entreprise vend du jus de fruits. Pour $x$ milliers de litres vendus, avec $x$ nombre réel de l'intervalle $[1\,;4]$, l'analyse des ventes conduit à modéliser le bénéfice $B(x)$ par l'expression donnée en milliers d'euros par :

$$B(x) = -15x^2 + 15x + 35x\ln x.$$

**1.** D'après le modèle, calculer le bénéfice réalisé par l'entreprise lorsqu'elle vend 2 500 litres de jus de fruits.

On donnera une valeur approchée à l'euro près de ce bénéfice.

2. Pour tout $x$ de l'intervalle $[1\,;4]$, montrer que $B'(x) = f(x)$ où $B'$ désigne la fonction dérivée de $B$.

3.

   a. À l'aide des résultats de la **partie 1**, donner les variations de la fonction $B$ sur l'intervalle $[1\,;4]$.

   b. En déduire la quantité de jus de fruits, au litre près, que l'entreprise doit vendre afin de réaliser un bénéfice maximal.