BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2023

MATHÉMATIQUES

JOUR 2

Durée de l'épreuve : **4 heures**

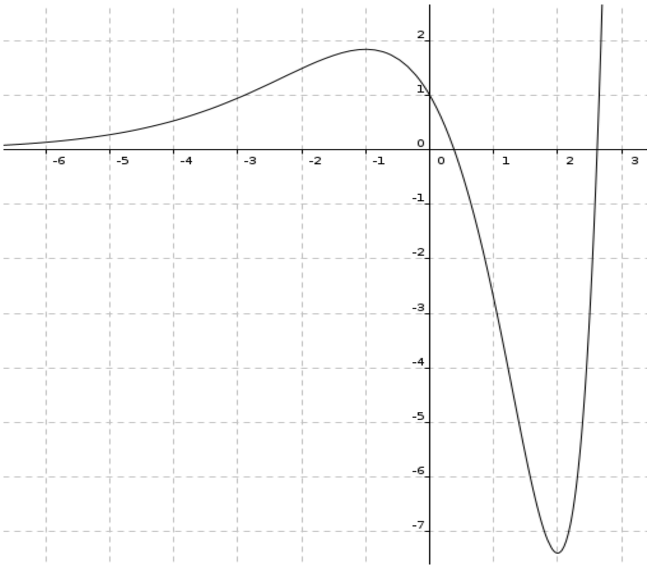
L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé. L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1 (5 points)

Partie A
Le plan est muni d'un repère orthogonal.
On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa fonction dérivée.
On donne ci-dessous la courbe représentative de **la fonction dérivée f'** .



Dans cette partie, les résultats seront obtenus par lecture graphique de la courbe représentative de la fonction dérivée f'. Aucune justification n'est demandée.

1) Donner le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$. *On utilisera des valeurs approchées si besoin.*

2) Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble être convexe.

Partie B
On admet que la fonction f de la **partie A** est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - 5x + 6)\mathrm{e}^x$.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère.

1) a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   b) Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

2) Montrer que, pour tout réel x, on a $f'(x) = (x^2 - 3x + 1)\mathrm{e}^x$.

3) En déduire le sens de variation de la fonction f.

4) Déterminer l'équation réduite de la tangente $(\mathcal{T})$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f'' la fonction dérivée seconde de la fonction f. On admet que, pour tout réel x, on a $f''(x) = (x + 1)(x - 2)\mathrm{e}^x$.

5) a) Étudier la convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   b) Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[-1\ ;\ 2]$, on a $f(x) \leq x + 6$.

Exercice 2 (5 points)

On étudie un groupe de $3\ 000$ sportifs qui pratiquent soit l'athlétisme dans le club A, soit le basketball dans le club B.

En 2023, le club A compte $1\ 700$ membres et le club B en compte $1\ 300$.

On décide de modéliser le nombre de membres du club A et du club B respectivement par deux suites (a_n) et (b_n), où n désigne le rang de l'année à partir de 2023.
L'année 2023 correspond au rang 0. On a alors $a_0 = 1\ 700$ et $b_0 = 1\ 300$.

Pour notre étude, on fait les hypothèses suivantes :

- durant l'étude, aucun sportif ne quitte le groupe ;
- chaque année, 15 % des sportifs du club A quittent ce club et adhèrent au club B ;
- chaque année, 10 % des sportifs du club B quittent ce club et adhèrent au club A.

1) Calculer les nombres de membres de chaque club en 2024.

2) Pour tout entier naturel n, déterminer une relation liant a_n et b_n .

3) Montrer que la suite (a_n) vérifie la relation suivante pour tout entier naturel n, on a : $a_{n+1} = 0{,}75\, a_n + 300$.

4) a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a :
$$1\ 200 \leq a_{n+1} \leq a_n \leq 1\ 700 .$$
b) En déduire que la suite (a_n) converge.

5) Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = a_n - 1200$.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
   b) Exprimer v_n en fonction de n .
   c) En déduire que pour tout entier naturel n, $a_n = 500 \times 0{,}75^n + 1200$.

6) a) Déterminer la limite de la suite (a_n) .
   b) Interpréter le résultat de la question précédente dans le contexte de l'exercice.

7) a) Recopier et compléter le programme Python ci-dessous afin qu'il renvoie la plus petite valeur de n à partir de laquelle le nombre de membres du club A est strictement inférieur à $1\ 280$.

```
def seuil() :
    n = 0
    A = 1700
    while ... :
        n = n+1
        A = ...
    return ...
```

   b) Déterminer la valeur renvoyée lorsqu'on appelle la fonction `seuil`.

Exercice 3 (5 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé d'unité 1 cm, on considère les points
$D(3\,;\,1\,;\,5)$ $E(3\,;\,-2\,;\,-1)$ $F(-1\,;\,2\,;\,1)$ $G(3\,;\,2\,;\,-3)$.

1) a) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{FG}$.
   b) Justifier que les points E, F et G ne sont pas alignés.

2) a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FG) .
   b) On appelle H le point de coordonnées $(2\,;\,2\,;\,-2)$.
   Vérifier que H est le projeté orthogonal de E sur la droite (FG) .
   c) Montrer que l'aire du triangle EFG est égale à 12 cm².

3) a) Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (EFG) .
   b) Déterminer une équation cartésienne du plan (EFG) .
   c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) passant par le point D et orthogonale au plan (EFG) .
   d) On note K le projeté orthogonal du point D sur le plan (EFG) .
   À l'aide des questions précédentes, calculer les coordonnées du point K.

4) a) Vérifier que la distance DK est égale à 5 cm.
   b) En déduire le volume du tétraèdre $DEFG$.

Exercice 4 (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Les cinq questions sont indépendantes.

1) On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 0{,}05 - \frac{\ln x}{x-1}$.
   La limite de la fonction f en $+\infty$ est égale à :
   a) $+\infty$
   b) $0{,}05$
   c) $-\infty$
   d) 0

2) On considère une fonction h continue sur l'intervalle $[-2\,;\,4]$ telle que :
$h(-1) = 0$ $\qquad$ $h(1) = 4$ $\qquad$ $h(3) = -1$

On peut affirmer que :

a) la fonction h est croissante sur l'intervalle $[-1\,;\,1]$.
b) la fonction h est positive sur l'intervalle $[-1\,;\,1]$.
c) il existe au moins un nombre réel a dans l'intervalle $[1;\,3]$ tel que $h(a) = 1$.
d) l'équation $h(x) = 1$ admet exactement deux solutions dans l'intervalle $[-2\,;\,4]$.

3) On considère deux suites (u_n) et (v_n) à termes strictement positifs telles que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ et (v_n) converge vers 0.

On peut affirmer que :

a) la suite $\left(\frac{1}{v_n}\right)$ converge.

b) la suite $\left(\frac{v_n}{u_n}\right)$ converge.

c) la suite (u_n) est croissante.

d) $\lim\limits_{n \to +\infty} (-u_n)^n = -\infty$

4) Pour participer à un jeu, un joueur doit payer 4 €.

Il lance ensuite un dé équilibré à six faces :

- s'il obtient 1, il remporte 12 € ;
- s'il obtient un nombre pair, il remporte 3 € ;
- sinon, il ne remporte rien.

En moyenne, le joueur :

a) gagne 3,5 €.
b) perd 3 €.
c) perd 1,5 €.
d) perd 0,5 €.

5) On considère la variable aléatoire X suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(3\,;\,p)$.
On sait que $P(X = 0) = \frac{1}{125}$. On peut affirmer que :

a) $p = \frac{1}{5}$

b) $P(X = 1) = \frac{124}{125}$

c) $p = \frac{4}{5}$

d) $P(X = 1) = \frac{4}{5}$