BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2025

MATHÉMATIQUES

Jour 2

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1 (5 points)

Au basket-ball, il est possible de marquer des paniers rapportant un point, deux points ou trois points.

*Les **PARTIES A** et **B** sont indépendantes.*

PARTIE A

L'entraineur d'une équipe de basket décide d'étudier les statistiques de réussite des lancers de ses joueurs. Il constate qu'à l'entrainement, lorsque Victor tente un panier à trois points, il le réussit avec une probabilité de $0{,}32$.
Lors d'un entrainement, Victor effectue une série de 15 lancers à trois points. On suppose que ces lancers sont indépendants.

On note N la variable aléatoire qui donne le nombre de paniers marqués.

Les résultats des probabilités demandées seront, si nécessaire, arrondis au millième.

1. On admet que la variable aléatoire N suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.

2. Calculer la probabilité que Victor réussisse exactement 4 paniers lors de cette série.

3. Déterminer la probabilité que Victor réussisse au plus 6 paniers lors de cette série.

4. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire N.

5. On note T la variable aléatoire qui donne le nombre de **points** marqués après cette série de lancers.

a. Exprimer T en fonction de N.

b. En déduire l'espérance de la variable aléatoire T. Donner une interprétation de cette valeur dans le contexte de l'exercice.

c. Calculer $P(12 \leq T \leq 18)$.

PARTIE B

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de points marqués par Victor lors d'un match.

On admet que l'espérance $E(X) = 22$ et la variance $V(X) = 65$.

Victor joue n matchs, où n est un nombre entier strictement positif.
On note $X_1, X_2, \ldots, X_n$ les variables aléatoires donnant le nombre de points marqués au cours des 1^er^, 2^e^, …, *n*-ième matchs. On admet que les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes et suivent la même loi que celle de X.

On pose $M_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$.

1. Dans cette question, on prend $n = 50$.
   a. Que représente la variable aléatoire M_{50}?
   b. Déterminer l'espérance et la variance de M_{50}.
   c. Démontrer que $P(|M_{50} - 22| \geq 3) \leq \frac{13}{90}$.
   d. En déduire que la probabilité de l'événement « $19 < M_{50} < 25$ » est strictement supérieure à $0{,}85$.

2. Indiquer, en justifiant, si l'affirmation suivante est vraie ou fausse :
   « Il n'existe aucun entier naturel n tel que $P(|M_n - 22| \geq 3) < 0{,}01$ ».

Exercice 2 (5 points)

Un des objectifs de cet exercice est de déterminer une approximation du nombre réel $\ln(2)$, en utilisant une des méthodes du mathématicien anglais Henry Briggs au 16e siècle.

On désigne par (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad \text{pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \sqrt{u_n}\ .$$

PARTIE A

1. a. Donner la valeur exacte de u_1 et de u_2.

b. Émettre une conjecture, à l'aide de la calculatrice, sur le sens de variation et la limite éventuelle de la suite.

2. a. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

c. Résoudre dans l'intervalle $[0; +\infty[$ l'équation $\sqrt{x} = x$.

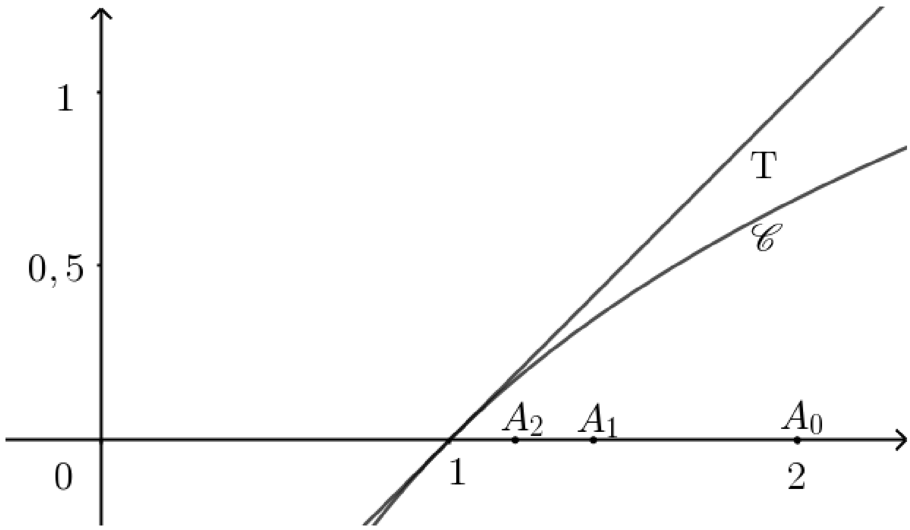
d. Déterminer, en justifiant, la limite de la suite (u_n).

PARTIE B

On désigne par (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = \ln(u_n)$.

1. **a.** Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
   b. Exprimer v_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.
   c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $\ln(2) = 2^n \ln(u_n)$.

2. On a tracé ci-dessous dans un repère orthonormé la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction ln et la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.
   Une équation de la droite T est $y = x - 1$.
   Les points A_0, A_1, A_2 ont pour abscisses respectives u_0, u_1 *et* u_2 et pour ordonnée 0.



On décide de prendre $x-1$ comme approximation de $\ln(x)$ lorsque x appartient à l'intervalle $]0{,}99\,;1{,}01[$.

a. Déterminer à l'aide de la calculatrice le plus petit entier naturel k tel que u_k appartienne à l'intervalle $]0{,}99\,;1{,}01[$ et donner une valeur approchée de u_k à 10^{-5} près.

b. En déduire une approximation de $\ln(u_k)$.

c. Déduire des questions 1.c. et 2.b. de la partie B une approximation de $\ln(2)$.

3. On généralise la méthode précédente à tout réel a strictement supérieur à 1.
Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin que l'appel `Briggs(a)` renvoie une approximation de $\ln(a)$.
On rappelle que l'instruction en langage Python `sqrt(a)` *correspond à* $\sqrt{a}$.

```
from math import*
def Briggs(a):
    n = 0
    while a >= 1.01:
        a = sqrt(a)
        n = n+1
    L = ...........

    return L
```

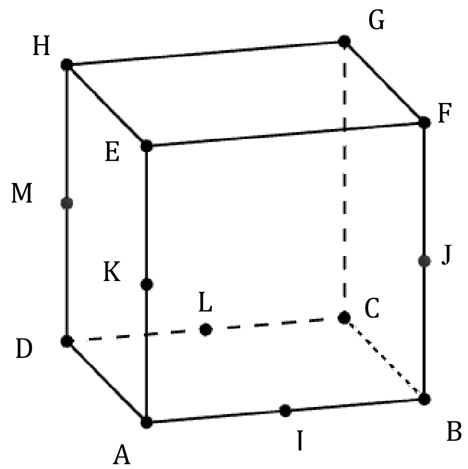
Exercice 3 **(5 points)**

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

PARTIE A

ABCDEFGH est un cube d'arête de longueur 1.
Les points I, J, K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes [AB], [BF], [AE], [CD] et [DH].



Affirmation 1 : « $\overrightarrow{JH} = 2\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{DM} - \overrightarrow{CB}$ »

Affirmation 2 : « Le triplet de vecteurs $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AG}\right)$ est une base de l'espace. »

Affirmation 3 : « $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{LM} = -\frac{1}{4}$ »

PARTIE B

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère :

- le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $2x - y + 3z + 6 = 0$
- les points $A\ (2\ ;\ 0\ ; -1)$ et $B\ (5\ ; -3\ ; 7)$

Affirmation 4 : « Le plan $\mathcal{P}$ et la droite (AB) sont parallèles. »

Affirmation 5 : « Le plan $\mathcal{P}$' parallèle à $\mathcal{P}$ passant par B a pour équation cartésienne $-2x + y - 3z + 34 = 0$ »

Affirmation 6 : « La distance du point A au plan $\mathcal{P}$ est égale à $\frac{\sqrt{14}}{2}$. »

On note (d) la droite de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = -12 + 2k \\ y = 6 \\ z = 3 - 5k \end{cases}, \text{ où } \quad k \in \mathbb{R}$$

Affirmation 7 : « Les droites (AB) et (d) ne sont pas coplanaires. »

Exercice 4 (5 points)

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,\pi]$ par $f(x) = \mathrm{e}^x \sin(x)$.

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère.

PARTIE A

1. a. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,\pi]$, $f'(x) = \mathrm{e}^x(\sin(x) + \cos(x))$.

b. Justifier que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.

2. a. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

b. Démontrer que la fonction f est convexe sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.

c. En déduire que pour tout réel x de l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, $\mathrm{e}^x \sin(x) \geq x$.

3. Justifier que le point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ de la courbe représentative de la fonction f est un point d'inflexion.

PARTIE B

On note $\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \sin(x)\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{J} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \cos(x)\,\mathrm{d}x$.

1. En intégrant par parties l'intégrale I de deux manières différentes, établir les deux relations suivantes : $\mathrm{I} = 1 + \mathrm{J}$ et $\mathrm{I} = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - \mathrm{J}$

2. En déduire que $\mathrm{I} = \frac{1+\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}}{2}$.

3. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x$.
Les courbes représentatives des fonctions f et g sont tracées dans le repère orthogonal ci-dessous sur l'intervalle $[0\,;\pi]$.
Calculer la valeur exacte de l'aire du domaine hachuré situé entre les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$.