BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2025

MATHÉMATIQUES

Jour 2

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

<u>Exercice 1</u> (6 points)
On se propose de comparer l'évolution d'une population animale dans deux milieux distincts A et B. Au 1er janvier 2025, on introduit $6\,000$ individus dans chacun des milieux A et B.

Partie A
Dans cette partie, on étudie l'évolution de la population dans le milieu A.
On suppose que dans ce milieu, l'évolution de la population est modélisée par une suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 6$ et de raison $0{,}93$. Pour tout entier naturel n, u_n représente la population au 1er janvier de l'année $2025 + n$, exprimée en millier d'individus.

1. Donner, selon ce modèle, la population au 1er janvier 2026.
2. Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n).
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B
Dans cette partie, on étudie l'évolution de la population dans le milieu B.
On suppose que dans ce milieu, l'évolution de la population est modélisée par la suite (v_n) définie par $v_0 = 6$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = -0{,}05{v_n}^2 + 1{,}1v_n$.
Pour tout entier naturel n, v_n représente la population au 1er janvier de l'année $2025 + n$, exprimée en millier d'individus.

1. Donner, selon ce modèle, la population au 1er janvier 2026.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = -0{,}05x^2 + 1{,}1x$.

2. Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0; 11]$.
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $2 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 6$.
4. En déduire que la suite (v_n) est convergente vers une limite ℓ.
5. **a.** Justifier que la limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$ puis en déduire la valeur de ℓ.
   b. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie C
Cette partie a pour but de comparer l'évolution de la population dans les deux milieux.

1. En résolvant une inéquation, déterminer l'année à partir de laquelle la population du milieu A sera strictement inférieure à 3 000 individus.
2. À l'aide de la calculatrice, déterminer l'année à partir de laquelle la population du milieu B sera strictement inférieure à 3 000 individus.
3. Justifier qu'à partir d'une certaine année, la population du milieu B dépassera la population du milieu A.
4. On considère le programme Python ci-contre.
   a. Recopier et compléter ce programme afin qu'après exécution, il affiche l'année à partir de laquelle la population du milieu B est strictement supérieure à la population du milieu A.
   b. Déterminer l'année affichée après exécution du programme.

```
n = 0
u = 6
v = 6
while ... :
    u = ...
    v = ...
    n = n + 1
print(2025 + n)
```

Exercice 2 (6 points)

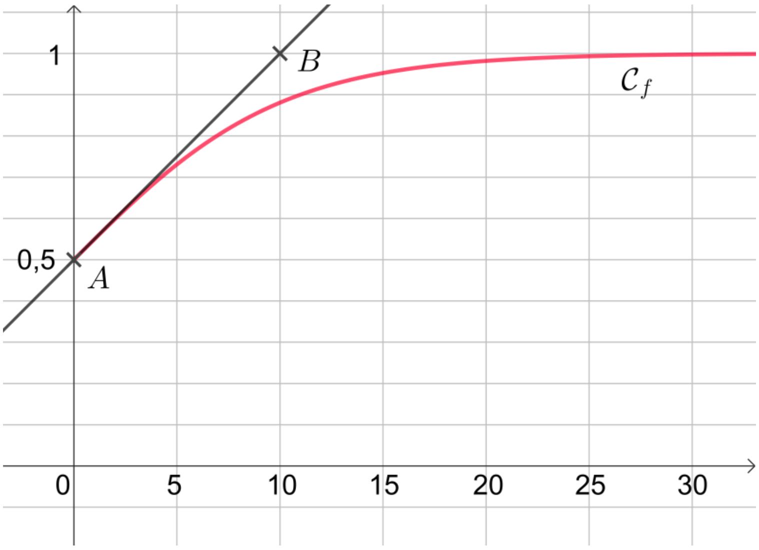
Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{1}{a+\mathrm{e}^{-bx}}$$

où a et b sont deux constantes réelles strictement positives.

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
La fonction f admet pour représentation graphique la courbe $\mathcal{C}_f$ ci-dessous :



On considère les points $A(0;0{,}5)$ et $B(10;1)$.
On admet que la droite (AB) est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A.

1. Par lecture graphique, donner une valeur approchée de $f(10)$.
2. On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$. Donner une interprétation graphique de ce résultat.
3. Justifier que $a=1$.
4. Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB).
5. **a.** Déterminer l'expression de $f'(x)$ en fonction de x et de la constante b.
   b. En déduire la valeur de b.

Partie B

On admet, dans la suite de l'exercice, que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-0{,}2x}}$$

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
3. Montrer qu'il existe un unique réel α positif tel que $f(\alpha)=0{,}97$.
4. À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement du réel α par deux nombres entiers consécutifs.

Partie C

1. Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$, $f(x)=\frac{e^{0,2x}}{1+e^{0,2x}}$.
2. En déduire une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
3. Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0;40]$, c'est-à-dire :

$$I=\frac{1}{40}\int_0^{40}\frac{1}{1+e^{-0,2x}}\,dx$$

On donnera la valeur exacte et une valeur approchée au millième.

Exercice 3 (4 points)

Le codage « base64 », utilisé en informatique, permet de représenter et de transmettre des messages et d'autres données telles que des images, en utilisant 64 caractères : les 26 lettres majuscules, les 26 lettres minuscules, les chiffres de 0 à 9 et deux autres caractères spéciaux.

Les parties A, B et C sont indépendantes.

Partie A

Dans cette partie, on s'intéresse aux séquences de 4 caractères en base64.
Par exemple, « gP3g » est une telle séquence.
Dans une séquence, l'ordre est à prendre en compte : les séquences « m5C2 » et « 5C2m » ne sont pas identiques.

1. Déterminer le nombre de séquences possibles.
2. Déterminer le nombre de séquences si l'on impose que les 4 caractères sont différents deux à deux.
3. **a.** Déterminer le nombre de séquences ne comportant pas de lettre A majuscule
   b. En déduire le nombre de séquences comportant au moins une lettre A majuscule.
   c. Déterminer le nombre de séquences comportant exactement une fois la lettre A majuscule.
   d. Déterminer le nombre de séquences comportant exactement deux fois la lettre A majuscule.

Partie B

On s'intéresse à la transmission d'une séquence de 250 caractères d'un ordinateur à un autre. On suppose que la probabilité qu'un caractère soit mal transmis est égale à $0,01$ et que les transmissions des différents caractères sont indépendantes entre elles.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de caractères mal transmis.

1. On admet que la variable aléatoire X suit la loi binomiale. Donner ses paramètres.
2. Déterminer la probabilité que tous les caractères soient bien transmis. *On donnera l'expression exacte, puis une valeur approchée à 10^{-3} près.*
3. Que pensez-vous de l'affirmation suivante : « La probabilité que plus de 16 caractères soient mal transmis est négligeable » ?

Partie C

On s'intéresse maintenant à la transmission de 4 séquences de 250 caractères.
On note X_1, X_2, X_3 et X_4 les variables aléatoires correspondant aux nombres de caractères mal transmis lors de la transmission de chacune des 4 séquences. On admet que les variables aléatoires X_1, X_2, X_3 et X_4 sont indépendantes entre elles et suivent la même loi que la variable aléatoire X définie en **partie B**.
On note $S = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$.

Déterminer, en justifiant, l'espérance et la variance de la variable aléatoire S.

<u>Exercice 4</u> (4 points)

On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de l'espace.
On considère les points $A(1; 0; 3)$, $B(-2; 1; 2)$ et $C(0; 3; 2)$.

1. **a.** Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
   b. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Vérifier que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal au plan (ABC).
   c. En déduire que le plan (ABC) admet pour équation cartésienne $-x + y + 4z - 11 = 0$.

On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $3x - 3y + 2z - 9 = 0$ et le plan $\mathcal{P}'$ d'équation cartésienne $x - y - z + 2 = 0$.

2. **a.** Démontrer que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants. On note (d) leur droite d'intersection.
   b. Déterminer si les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont perpendiculaires.
3. Montrer que la droite (d) est dirigée par le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
4. Montrer que le point $M(2; 1; 3)$ appartient aux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.
   En déduire une représentation paramétrique de la droite (d).
5. Montrer que la droite (d) est aussi incluse dans le plan (ABC).
   Que peut-on dire des trois plans (ABC), $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$?