BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2025

MATHÉMATIQUES

Jour 2

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Sauf mention contraire, toute réponse devra être justifiée.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1. (5 points)

Dans tout l'exercice, les probabilités seront, si nécessaire, arrondies à 10^{-3} près.

Une donnée binaire est une donnée qui ne peut prendre que deux valeurs : 0 ou 1.
Une donnée de ce type est transmise successivement d'une machine à une autre.
Chaque machine transmet la donnée reçue soit de manière fidèle, c'est-à-dire en transmettant l'information telle qu'elle l'a reçue (1 devient 1 et 0 devient 0), soit de façon contraire (1 devient 0 et 0 devient 1).

La transmission est fidèle dans 90% des cas, et donc contraire dans 10% des cas.

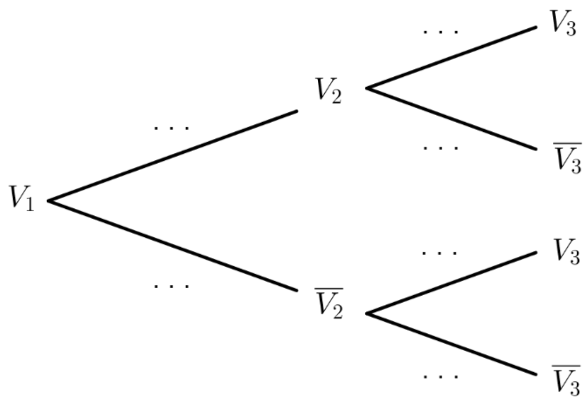
Dans tout l'exercice, la première machine reçoit toujours la valeur 1.

Partie A

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note :

- V_n l'événement : « la n-ième machine détient la valeur 1 » ;
- $\overline{V_n}$ l'événement : « la n-ième machine détient la valeur 0 ».

1. a. Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous.



b. Démontrer que $P(V_3) = 0{,}82$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

c. Sachant que la troisième machine a reçu la valeur 1, calculer la probabilité que la deuxième machine ait aussi reçu la valeur 1.

2. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note $p_n = P(V_n)$.
La première machine a reçu la valeur 1, on a donc $p_1 = 1$.

a. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$p_{n+1} = 0{,}8p_n + 0{,}1.$$

b. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$p_n = 0{,}5 \times 0{,}8^{n-1} + 0{,}5.$$

c. Calculer la limite de p_n lorsque n tend vers l'infini. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Pour modéliser en langage Python la transmission de la donnée binaire décrite en début d'exercice, on considère la fonction `simulation` qui prend en paramètre un entier naturel `n` qui représente le nombre de transmissions réalisées d'une machine à une autre, et qui renvoie la liste des valeurs successives de la donnée binaire.

On donne ci-dessous le script incomplet de cette fonction.
On rappelle que l'instruction `rand()` renvoie un nombre aléatoire de l'intervalle $[0,1[$.

```
1      def simulation(n):
2          donnee = 1
3          liste = [donnee]
4          for k in range(n):
5              if rand() < 0.1 :
6                  donnee = 1 - donnee
7              liste.append(donnee)
9          return liste
```

Par exemple, `simulation(3)` peut renvoyer `[1, 0, 0, 1]`. Cette liste traduit :

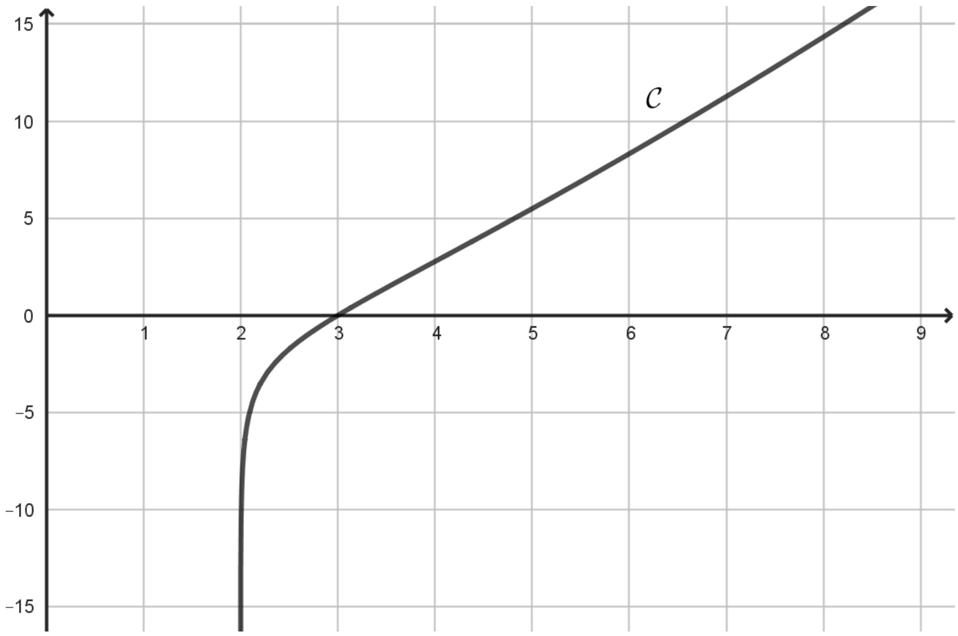
- qu'une donnée binaire a été successivement transmise trois fois entre quatre machines ;
- la première machine qui détient la valeur 1 a transmis de façon contraire cette donnée à la deuxième machine ;
- la deuxième machine a transmis la donnée qu'elle détient de façon fidèle à la troisième ;
- la troisième machine a transmis de façon contraire la donnée qu'elle détient à la quatrième.

1. Déterminer le rôle des instructions des lignes 5 et 6 de l'algorithme ci-dessus.

2. Calculer la probabilité que `simulation(4)` renvoie la liste `[1, 1, 1, 1, 1]` et la probabilité que `simulation(6)` renvoie la liste `[1, 0, 1, 0, 0, 1, 1]`.

Exercice 2. (5 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]2\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x\ln(x-2)$.
Une partie de la courbe représentative C de la fonction f est donnée ci-dessous.



1. Conjecturer, à l'aide du graphique, le sens de variation de f, ses limites aux bornes de son ensemble de définition ainsi que les éventuelles asymptotes.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $]2\,;\,+\infty[$.
3. Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)$. Ce résultat confirme-t-il l'une des conjectures faites à la question **1.** ?
4. Démontrer que pour tout x appartenant à $]2\,;\,+\infty[$:
$$f'(x) = \ln(x-2) + \frac{x}{x-2}.$$
5. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]2\,;\,+\infty[$ par $g(x) = f'(x)$.

   a. Démontrer que pour tout x appartenant à $]2\,;\,+\infty[$, on a :
$$g'(x) = \frac{x-4}{(x-2)^2}.$$

   b. On admet que $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} g(x) = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

   En déduire le tableau des variations de la fonction g sur $]2\,;\,+\infty[$. On fera apparaître la valeur exacte de l'extremum de la fonction g.

   c. En déduire que, pour tout x appartenant à $]2\,;\,+\infty[$, $g(x) > 0$.

   d. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $]2\,;\,+\infty[$.

6. Étudier la convexité de la fonction f sur $]2\,;\,+\infty[$ et préciser les coordonnées d'un éventuel point d'inflexion de la courbe représentative de la fonction f.
7. Combien de valeurs de x existe-t-il pour lesquelles la courbe représentative de f admet une tangente de coefficient directeur égal à 3 ?

Exercice 3. (5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

On considère les points suivants :

$$A(1\ ;3\ ;0), B(-1\ ;4\ ;5), C(0\ ;1\ ;0) \text{ et } D(-2\ ;2\ ;1).$$

1. Montrer que les points A, B et C déterminent un plan.

2. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

3. Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$.

a. Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).

b. Justifier que le plan (ABC) admet pour équation cartésienne :

$$2x - y + z + 1 = 0.$$

c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

4. On appelle H le point de coordonnées $\left(-\frac{2}{3}\ ;\frac{4}{3}\ ;\frac{5}{3}\right)$.

Vérifier que H est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

5. On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par $V = \frac{1}{3}B \times h$, où B est l'aire d'une base du tétraèdre et h est sa hauteur relative à cette base.

a. Montrer que $DH = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

b. En déduire le volume du tétraèdre $ABCD$.

6. On considère la droite d de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 - 2k \\ y = \quad -3k \\ z = 1 + k \end{cases}, \text{ où } k \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

La droite d et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ?

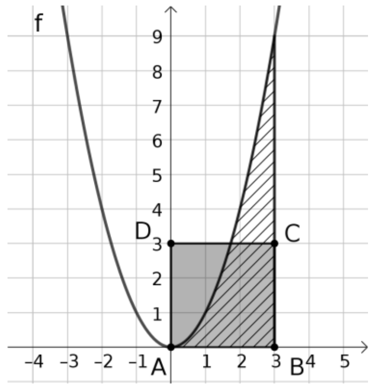
Exercice 4. (5 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.

Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. Soient E et F les ensembles $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ et $F = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
Affirmation n°1 : Il y a davantage de 3 −uplets d'éléments distincts de E que de combinaisons à 4 éléments de F.

2. Dans le repère orthonormé ci-contre, on a représenté la fonction carré, notée f, ainsi que le carré ABCD de côté 3.
Affirmation n°2 : La zone hachurée et le carré ABCD ont la même aire.



3. On considère l'intégrale I ci-dessous :

$$J = \int_1^2 x \ln(x)\, \mathrm{d}x.$$

Affirmation n°3 : Une intégration par parties permet d'obtenir : $J = \frac{7}{11}$.

4. Sur $\mathbb{R}$, on considère l'équation différentielle (E) : $y' = 2y - \mathrm{e}^x$.
Affirmation n°4 : La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x}$ est solution de l'équation différentielle (E).

5. Soit x donné dans $[0,1[$. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = (x - 1)\mathrm{e}^n + \cos(n).$$

Affirmation n°5 : La suite (u_n) diverge vers $-\infty$.