BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2026

MATHÉMATIQUES

Jour 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 9 pages numérotées de 1/9 à 9/9.

Le sujet est constitué de quatre exercices.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

EXERCICE 1 (6 points)

Une plateforme de diffusion musicale propose trois types d'abonnements : « Étudiant », « Classique » et « Famille ». Elle propose également une option « Écoute hors-ligne » qu'on peut activer pour chaque type d'abonnement et qui permet de télécharger de la musique.

Une étude statistique menée sur les abonnés a permis d'établir que :

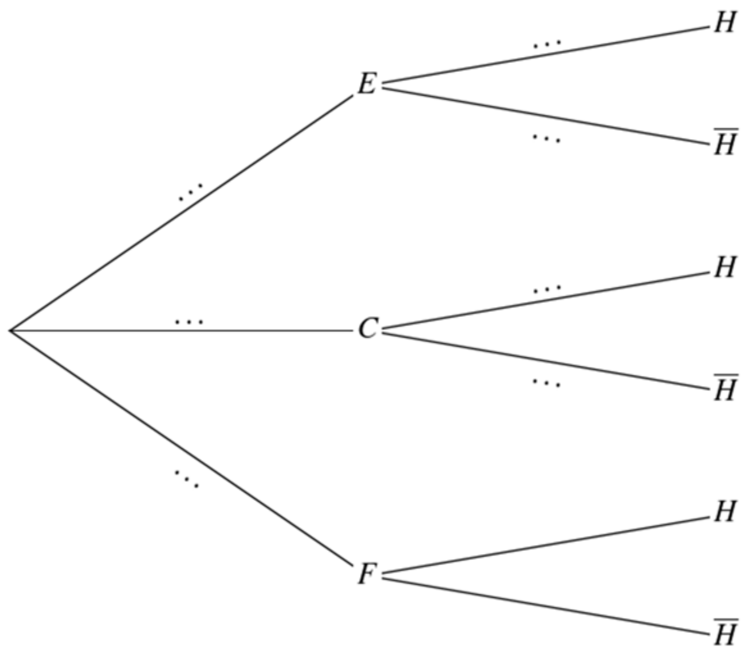
- 25 % des abonnés ont choisi l'abonnement « Étudiant » et 15 % ont choisi l'abonnement « Famille » ;
- 45 % des abonnés « Étudiant » ont activé l'option « Écoute hors-ligne » ;
- 30 % des abonnés « Classique » ont activé l'option « Écoute hors-ligne » ;
- 12 % des abonnés ont choisi l'abonnement « Famille » et ont activé l'option « Écoute hors-ligne ».

On prélève au hasard le profil d'un abonné et on considère les événements suivants :

- E : l'abonné a choisi l'abonnement « Étudiant » ;
- C : l'abonné a choisi l'abonnement « Classique » ;
- F : l'abonné a choisi l'abonnement « Famille » ;
- H : l'abonné a activé l'option « Écoute hors-ligne ».

Partie A

1. Recopier l'arbre de probabilités suivant, en complétant les pointillés :



2. Calculer la valeur exacte de $P\,(E\,\cap\,H)$.

3. Démontrer que la probabilité qu'un abonné ait activé l'option « Écoute hors-ligne » est de $0{,}4125$.

4. Un abonné a activé l'option « Écoute hors-ligne ». Déterminer la probabilité qu'il ait choisi l'abonnement « Étudiant ». *On arrondira le résultat au millième.*

Partie B

On choisit huit abonnés de cette plateforme, au hasard et de manière indépendante. On considère qu'il y a suffisamment d'abonnés pour que ce choix soit assimilé à un tirage avec remise.
On rappelle que la probabilité qu'un abonné ait activé l'option « Écoute hors-ligne » est de $0{,}4125$.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre d'abonnés ayant activé l'option « Écoute hors-ligne ».

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.

2. Calculer la probabilité qu'aucun de ces huit abonnés n'ait activé l'option « Écoute hors-ligne ». *On arrondira le résultat au millième.*

3. Dans cette question, n est un entier naturel non nul.
   On s'intéresse à un échantillon de n abonnés, qu'on assimile à un tirage avec remise.
   On note q_n la probabilité qu'au moins un abonné de cet échantillon ait activé l'option « Écoute hors-ligne ».
   a. Démontrer que, pour tout n entier naturel non nul, $q_n = 1 - 0{,}5875^n$.
   b. Déterminer la plus petite valeur de n telle que la probabilité qu'au moins un abonné de l'échantillon ait activé l'option « Écoute hors-ligne » soit supérieure ou égale à $99{,}9$ %.

Partie C

La plateforme propose les tarifs mensuels suivants :

- Abonnement « Étudiant » : 5 € par mois ;
- Abonnement « Classique » : 10 € par mois ;
- Abonnement « Famille » : 16 € par mois ;
- Option « Écoute hors-ligne » : 2 euros de plus par mois quel que soit l'abonnement choisi.

On note Y la variable aléatoire égale au montant payé mensuellement par un abonné.

1. Donner les six valeurs possibles prises par la variable aléatoire Y.

2. Dresser le tableau décrivant la loi de probabilité de la variable aléatoire Y.

3. Démontrer que l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y vaut $10{,}475$ et interpréter ce résultat dans le contexte.

4. À l'aide de la calculatrice, donner la variance de la variable aléatoire Y, arrondie au centième.

5. Une plateforme vidéo propose les mêmes types d'abonnements. On note Z la variable aléatoire égale au montant payé mensuellement par un abonné à cette plateforme vidéo.
On admet que l'espérance de la variable aléatoire Z vaut 9 et son écart-type 2.

   a. Calculer la variance de la variable aléatoire Z.
   b. Un responsable affirme que si on interroge un abonné de cette plateforme vidéo au hasard, il y a au moins 50 % de chances pour que le prix de son abonnement soit strictement compris entre 6 et 12 euros.
   Justifier cette affirmation.

EXERCICE 2 (4 points)

La perche-soleil est une espèce de poisson envahissante. Un plan de lutte contre la prolifération de cette espèce est mis en place et on étudie dans cet exercice deux modèles d'évolution de la population de perches-soleil dans un étang naturel. On estime que, dans cet étang, le nombre de perches-soleil s'élève à $4\,000$ individus au 1er janvier 2025.

Partie A : étude d'un modèle discret

Dans cette partie, on modélise le nombre de perches-soleil dans l'étang par une suite (u_n). Pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre de perches-soleil, exprimé en millier, dans l'étang au 1er janvier de l'année $2025 + n$.
La suite (u_n) est définie par :

- $u_0 = 4$.
- pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 4 - \dfrac{4}{u_n}$.

On admet que cette suite est bien définie et qu'en particulier pour tout entier n, $u_n > 0$.

1. Calculer le nombre de perches-soleil au 1er janvier 2026 donnée par ce modèle.

2. On note h la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $h(x) = 4 - \dfrac{4}{x}$.
   a. Justifier que la fonction h est croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
   b. Démontrer que pour tout entier naturel n :
   $$2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4.$$
   c. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
   d. Justifier que $\ell = 2$.
   e. Ce modèle prévoit-il une élimination à long terme de l'espèce envahissante ?

3. On considère le script Python ci-dessous.
   a. Soit s un réel appartenant à l'intervalle $]2;4[$.
   Recopier et compléter ce script de sorte qu'il renvoie, après exécution, le plus petit entier n tel que $u_n < s$.

```
def population(s) :
    u=4
    n=0
    while … :
        u= …
        n= …
    return n
```

   b. Quelle valeur renvoie la commande `population(2.2)` ?
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B : étude d'un modèle continu

On note t le temps écoulé, exprimé en année, à partir du 1er janvier 2025. L'évolution du nombre de perches-soleil, exprimé en millier, est modélisée par la fonction p telle que :

- la fonction p est définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$;
- $p(0) = 4$;
- la fonction p est solution de l'équation différentielle (E) $y' + y = 2$ où y est une fonction de la variable réelle t.

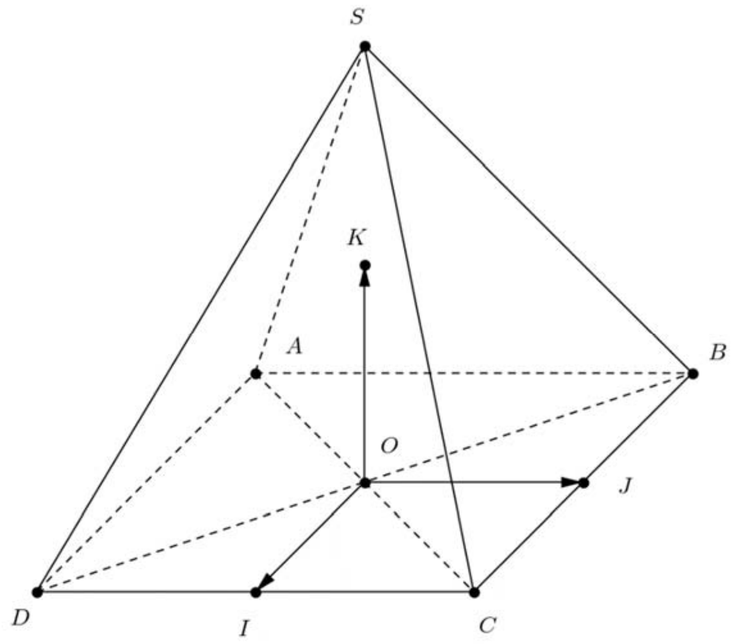
1. Donner l'ensemble des solutions de l'équation (E).

2. En déduire que l'expression de la fonction p sur l'intervalle $[0; +\infty[$ est $p(t) = 2\mathrm{e}^{-t} + 2$.

3. Ce modèle prévoit-il une élimination à long terme de l'espèce envahissante ?

EXERCICE 3 (5 points)

Dans cet exercice l'unité est le cm.
On considère une pyramide à base carrée $SABCD$ comme dans la figure ci-dessous.



Dans cette figure :

- $AB = BC = CD = DA = OS = 2$ cm
- I est le milieu de $[CD]$, J le milieu de $[BC]$ et K le milieu de $[OS]$.

L'espace est muni du repère orthonormé $\left(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK}\right)$.
On admet que $B(-1; 1; 0)$, $C(1; 1; 0)$, et $S(0; 0; 2)$.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

1. Donner les coordonnées des points A et D.

2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SB}$.

3. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{BSC}$ arrondie au dixième de degré près.

Partie B

On se propose dans cette partie de déterminer la distance du point O au plan (SBC).

1. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   a. Justifier que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (SBC).
   b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (SBC) est $2y + z - 2 = 0$.

2. On note H le projeté orthogonal du point O sur le plan (SBC).

   a. Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite (OH) est
$$\begin{cases} x &= 0 \\ y &= 2t \\ z &= t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$
   b. Calculer les coordonnées du point H.

   c. En déduire que la distance du point O au plan (SBC) est égale à $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ cm.

Partie C

On se propose ici de retrouver le résultat de la **partie B** par une autre méthode.

1. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par :
$$V = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}.$$
   a. Calculer le volume de la pyramide $SABCD$.

   b. En déduire que le volume de la pyramide $OCBS$ est égal à $\frac{2}{3}$ cm^3.

2. Déterminer l'aire du triangle SBC.

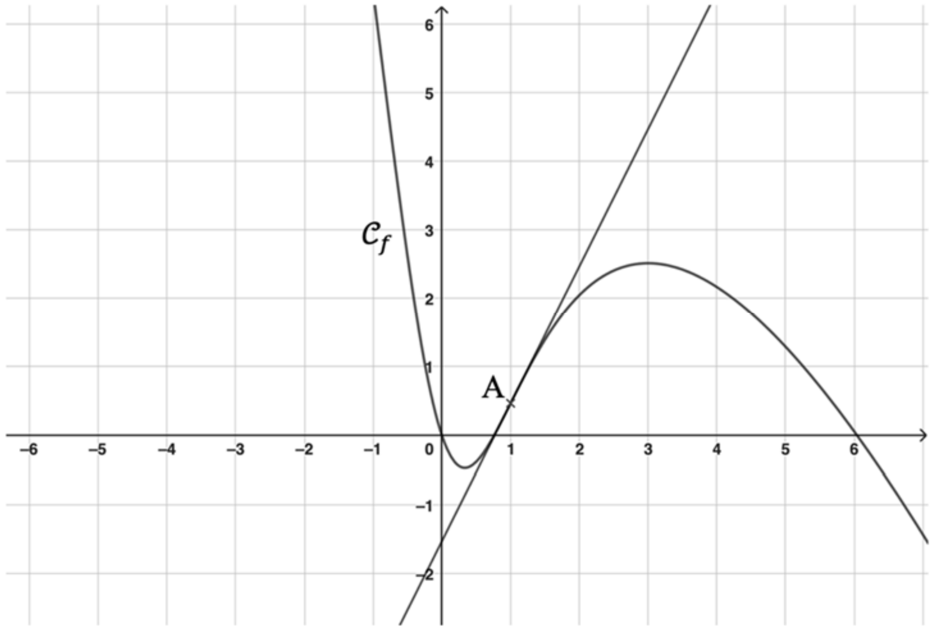
3. Déduire des questions précédentes que la distance du point O au plan (SBC) est égale à $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ cm.

EXERCICE 4 (5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5\ln(x^2+1) - 3x$ et on admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

On a tracé ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ et la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1.



1. Conjecturer, à l'aide de la représentation graphique de la fonction f, les intervalles de $\mathbb{R}$ sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave.

2. Déterminer, en justifiant, la limite de la fonction f en $-\infty$.

3. a. Démontrer que, pour tout x réel strictement positif,
$$f(x) = x\left(10\frac{\ln x}{x} - 3\right) + 5\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right).$$
   b. Déterminer, en justifiant, la limite de la fonction f en $+\infty$.

4. a. Démontrer que pour tout x réel, $f'(x) = \frac{-3x^2+10x-3}{x^2+1}$.

   b. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

5. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x,
$$f''(x) = \frac{-10x^2+10}{(x^2+1)^2}.$$

   a. Valider ou rejeter la conjecture faite à la question 1.
   b. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1.
   c. En déduire que pour tout $x \geq 1$, $\ln(x^2+1) \leq x + \ln(2) - 1$.