

MATHÉMATIQUES

SESSION 2026

Durée : 2 heures

Coefficient : 2

Matériel autorisé

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collègue » est autorisé.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Le sujet comporte 7 pages, numérotées de 1/7 à 7/7.

EXERCICE 1 (10 points)

Une entreprise commercialise un nouveau type de verres.
On étudie l'évolution des ventes de ce verre.

Les trois parties peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A – Série statistique

L'évolution des ventes mensuelles de ce verre est donnée dans le tableau ci-dessous.

Mois	Janvier 2026	Février 2026	Mars 2026	Avril 2026	Mai 2026	Juin 2026
Rang du mois t	0	1	2	3	4	5
Nombre de verres vendus N	500	1 660	3 120	3 750	3 960	3 990

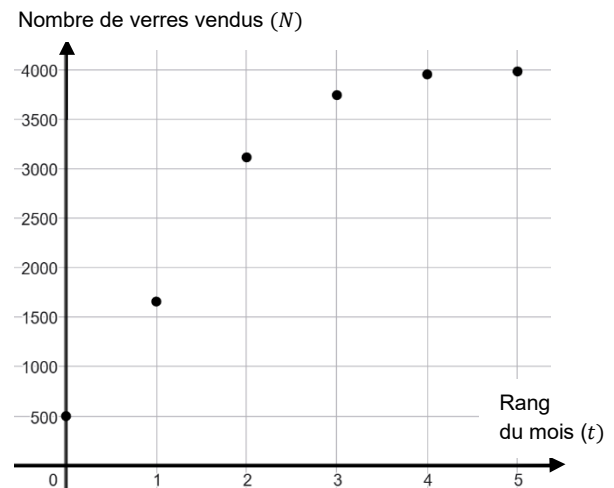
1. Les données du tableau ont permis de réaliser le graphique ci-contre.

Au vu de ce graphique, un ajustement linéaire de N en t est-il pertinent ? Justifier.

2. On pose le changement de variable

$$z = \ln\left(\frac{4\,000}{N} - 1\right),$$

et on obtient alors le tableau ci-dessous.



Mois	Janvier 2026	Février 2026	Mars 2026	Avril 2026	Mai 2026	Juin 2026
Rang du mois t	0	1	2	3	4	5
Nombre de verres vendus N	500	1 660	3 120	3 750	3 960	3 990
z	1,946	0,343		-2,708	-4,595	-5,989

- a. Calculer la valeur de z pour le mois de mars 2026. On arrondira à 10^{-3} .
- b. On note r le coefficient de corrélation linéaire de z en t .
Sans calculer la valeur de r , expliquer pourquoi on peut être certain que $r < 0$.
- c. Déterminer la valeur, arrondie à 10^{-3} , du coefficient de corrélation linéaire r .
Un ajustement linéaire de z en t est-il pertinent ? Justifier.

- d. Déterminer une équation de la droite de régression linéaire de z en t (selon la méthode des moindres carrés) sous la forme $z = at + b$. Les coefficients a et b seront arrondis à 10^{-1} .
- e. On admet que la question précédente permet d'en déduire que le nombre de verres vendus N en fonction du rang du mois t est donné par la relation :

$$(R) : N = \frac{4000}{1 + e^{-1,6t+2}} .$$

Déterminer la constante C de telle que l'égalité (R) s'écrive :

$$N = \frac{4000}{1 + Ce^{-1,6t}} .$$

Donner un arrondi de la constante C à l'unité près.

Partie B – Équation différentielle

Le but de cette partie est de résoudre une équation différentielle dont la solution correspond au dénominateur de l'expression obtenue à la question **A.2.e** donnant le nombre de verres vendus N en fonction du rang du mois t .

On considère l'équation différentielle

$$(E) : y' + 1,6y = 1,6 ,$$

où y est une fonction inconnue de la variable t , définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, et où y' est sa fonction dérivée.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle

$$(E_0) : y' + 1,6y = 0 .$$

On fournit la formule suivante :

Équation différentielle	Solutions sur un intervalle I
$ay' + by = 0$	$f(t) = ke^{-\frac{b}{a}t}, k \in \mathbb{R}$

2. On considère un réel A et la fonction g définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par
- $$g(t) = A.$$

Déterminer le réel A de telle sorte que la fonction g soit solution de l'équation différentielle (E) .

3. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E) .
4. Déterminer la fonction h , solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $h(0) = 8$.

Partie C – Étude d'une fonction

On considère que l'évolution du nombre de verres vendus est modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par

$$f(t) = \frac{4000}{1 + 7e^{-1,6t}}.$$

t désigne le rang du mois à partir de janvier 2026 : ainsi, $t = 0$ correspond au mois de janvier 2026 ; $t = 1$ correspond au mois de février 2026.

$f(t)$ modélise le nombre de verres vendus.

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée. On note $\mathcal{C}$ la courbe de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Déterminer le nombre de verres vendus en avril 2026.

2. On dispose des trois indications ci-dessous :

- indication numéro 1 : $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 4\,000$;

- indication numéro 2 : $f'(t) = \frac{44\,800e^{-1,6t}}{(1 + 7e^{-1,6t})^2}$;

- indication numéro 3 : le développement limité à l'ordre 2 de $f(t)$ en $t = 0$ est :

$$f(t) = 500 + 700t + 420t^2 + t^2\varepsilon(t), \text{ où } \lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0.$$

À l'aide de ces résultats, répondre aux questions suivantes, en indiquant à chaque fois le numéro de l'indication utilisée.

a. Justifier que la courbe $\mathcal{C}$ possède une asymptote dont on déterminera une équation.

b. Justifier que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Dresser son tableau de variations.

c. On note $\mathcal{T}$ la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $t = 0$.

Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$.

Justifier que la courbe $\mathcal{C}$ est située au-dessus de la tangente $\mathcal{T}$ au voisinage de $t = 0$.

3. Le chef d'entreprise affirme : « *il arrivera un moment où l'on commercialisera plus de 5 000 verres par mois.* » A-t-il raison ? Justifier.

4. Réaliser un schéma sommaire donnant l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ et sur lequel les résultats des questions 2.a, 2.b, 2.c seront visibles.

EXERCICE 2 (10 points)

Une usine fabrique des montures de lunettes dites « montures intelligentes ».
Ces montures sont susceptibles de présenter deux types de défaut :

- un défaut concernant la batterie ;
- un défaut concernant les charnières des branches.

Les quatre parties peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A – Probabilités conditionnelles

Dans cette partie, les probabilités seront arrondies, si nécessaire, à 10^{-3} .

Le contrôle-qualité prélève un échantillon 1 000 montures sur lequel il examine les éventuels défauts.
Les résultats figurent dans le tableau ci-dessous.

	Montures présentant un défaut de Charnières	Montures <u>ne</u> présentant <u>pas</u> un défaut de Charnières	Total
Montures présentant un défaut de Batterie	10	...	60
Montures <u>ne</u> présentant <u>pas</u> un défaut de Batterie	20	...	
Total		...	1000

On choisit au hasard une monture parmi celles de l'échantillon et on note les évènements :

B : « la monture choisie présente un défaut de batterie ».

C : « la monture choisie présente un défaut de charnières ».

1. Recopier et compléter le tableau ci-dessus.
2. Quelle est la probabilité que la monture choisie présente un défaut de charnières ?
3. Quelle est la probabilité que la monture choisie ne présente aucun défaut ?
4. Déterminer la probabilité de C sachant B , notée $P_B(C)$.

Partie B – Loi binomiale

Dans cette partie, les probabilités seront arrondies, si nécessaire, à 10^{-3} .

On admet que, dans le stock de montures produites par l'usine, 6 % d'entre elles présentent un défaut de batterie.

On choisit au hasard 150 montures du stock que l'on dispose dans un colis et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de montures du colis présentant un défaut de batterie.

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Donner ses paramètres.
2. Quelle est la probabilité qu'il y ait au maximum 9 montures présentant un défaut de batterie dans le colis ?
3. Si, dans le colis, le nombre de batteries présentant un défaut de batteries est strictement supérieur à 12, le colis n'est pas expédié.
Quelle est la probabilité que le colis ne soit pas expédié ?
4. Déterminer l'espérance $E(X)$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie C – Loi normale

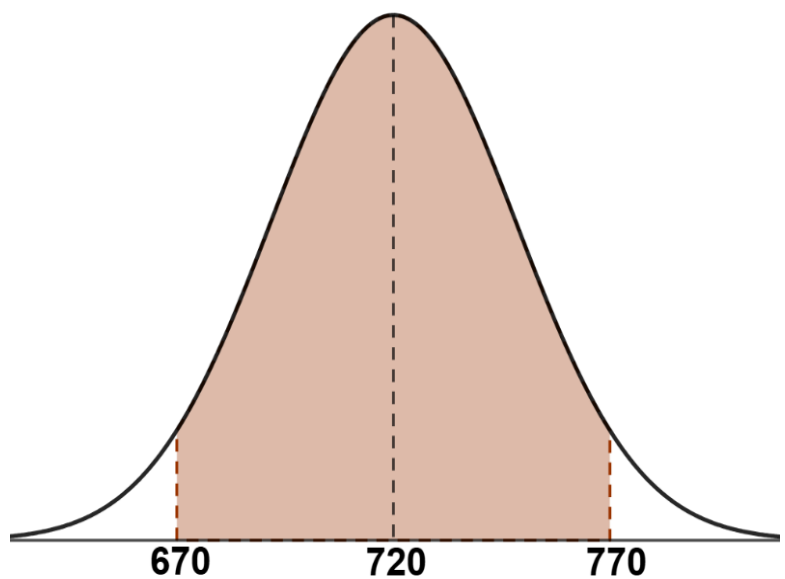
On s'intéresse à la durée de vie des batteries des montures.

On note Y la variable aléatoire qui mesure la durée de vie, en heures, d'une batterie.

On sait que la variable aléatoire Y suit une loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ .

La fonction densité de la variable aléatoire Y est représentée ci-contre.

L'aire grisée correspond à une probabilité égale à 0,95.



1. Donner la valeur de la moyenne μ .
2. Justifier que l'écart-type σ est environ égal à 25.
3. Déterminer les probabilités $P(Y \geq 720)$, $P(Y \leq 770)$ et $P(Y \leq 670)$.

Partie D – Intervalle de confiance

Le fabricant souhaite connaître la proportion p de clients satisfaits de cette nouvelle monture.

Il réalise une enquête auprès de 800 clients : 616 déclarent être satisfaits.

1. Donner une estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p .
2. Déterminer un intervalle de confiance centré sur f de la proportion inconnue p avec le niveau de confiance de 95 %. Les bornes de l'intervalle seront arrondies à 10^{-2} .

On fournit la formule suivante :

Intervalle de confiance d'une proportion avec un niveau de confiance de 95 %
$\left[f - 1,96 \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} ; f + 1,96 \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \right]$

3. On suppose à présent que l'enquête est réalisée, non pas auprès de 800 clients, mais de 200 clients, et que 154 d'entre eux se déclarent satisfaits.
Dans ce cas, l'intervalle de confiance obtenu à la question 2 est-il modifié ? Justifier.