Problème 1 : continuité uniforme

Étant donnée une fonction f de variable réelle définie sur un intervalle I d'intérieur non vide, on dit que f est uniformément continue sur I lorsque :

$$\forall\varepsilon > 0\,,\ \exists\eta > 0\,,\ \forall(x,y) \in I^2\,,\ \Big(|x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon\Big)$$

1. Écrire à l'aide de quantificateurs la proposition « f n'est pas uniformément continue sur I ».
2. On rappelle qu'une fonction f est lipschitzienne de rapport k, où k est un réel strictement positif, si pour tout couple (x,y) d'éléments de I on a :

   $$|f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|$$

   Montrer que toute fonction lipschitzienne sur I est uniformément continue sur I.
3.
   3.1. Montrer que pour tous réels x et y on a :

   $$\Big||y| - |x|\Big| \leqslant |y-x|$$

   3.2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $$f(x) = \frac{1}{1+|x|}$$

   Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
4.
   4.1. Montrer que pour tous réels positifs x et y on a :

   $$\sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{x} + \sqrt{y} \qquad \text{et} \qquad \Big|\sqrt{x} - \sqrt{y}\Big| \leqslant \sqrt{|x-y|}$$

   4.2. Montrer que la fonction $g : x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

   4.3. Montrer que la fonction g n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}^+$.
5.
   5.1. En considérant les deux suites de réels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies pour tout entier n par $x_n = \sqrt{n+1}$ et $y_n = \sqrt{n}$, montrer que la fonction $h : x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

   5.2. La fonction h est-elle lipschitzienne sur $\mathbb{R}$?
6. Soit F un application uniformément continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. On se propose de montrer qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:

   $$F(x) \leqslant ax + b$$

   6.1. Justifier l'existence d'un réel η_1 strictement positif tel que :

   $$\forall(x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2, \Big(|x-y| \leqslant \eta_1 \Rightarrow |F(x) - F(y)| \leqslant 1\Big)$$

   Soit $x_0 \in \mathbb{R}^+$.

   6.2. Soit n_0 le plus petit entier tel que $\dfrac{x_0}{n_0} \leqslant \eta_1$; justifier l'existence de n_0 et exprimer n_0 en fonction de x_0 et de η_1.

6.3. Montrer que :

$$|F(x_0) - F(0)| \leqslant \sum_{k=0}^{n_0-1} \left| F\left(\frac{(k+1)x_0}{n_0}\right) - F\left(\frac{kx_0}{n_0}\right) \right|$$

6.4. Conclure.

7.

7.1. Les fonctions polynômes de degré supérieur ou égal à 2 sont-elles uniformément continues sur $\mathbb{R}$?

7.2. La fonction exponentielle est-elle uniformément continue sur $\mathbb{R}$?

8. **Théorème de Heine**

Soit $I = [a; b]$ $(a < b)$ un segment de $\mathbb{R}$. On se propose de démontrer le théorème de Heine[1] : *si une fonction G est continue sur I alors elle est uniformément continue sur I.*

On suppose dans la suite que G est une fonction continue sur $I = [a; b]$ et que G n'est pas uniformément continue sur I.

8.1. Justifier qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ et deux suites $(x_n)_{n\geqslant 1}$ et $(y_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de I tels que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$|x_n - y_n| \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad |G(x_n) - G(y_n)| > \varepsilon$$

8.2. Justifier qu'il existe deux sous-suites $(x_{\sigma(n)})_{n\geqslant 1}$ et $(y_{\sigma(n)})_{n\geqslant 1}$ convergentes telles que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$|x_{\sigma(n)} - y_{\sigma(n)}| \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad |G(x_{\sigma(n)}) - G(y_{\sigma(n)})| > \varepsilon$$

8.3. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} x_{\sigma(n)} = \lim_{n\to+\infty} y_{\sigma(n)}$$

8.4. Conclure.

9. Soit J un intervalle d'intérieur non vide. Si une fonction G est uniformément continue sur tout intervalle $[a; b]$ inclus dans J, G est-elle nécessairement uniformément continue sur J ?

Problème 2 : marches aléatoires

Partie A : quelques résultats d'analyse

1. On considère la suite $(H_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

1.1. Montrer que pour tout entier $k \geqslant 1$:

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k}$$

1.2. En déduire que pour tout $n \geqslant 1$:

$$\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln(n)$$

puis que

$$H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$$

1. Eduard Heine (1821-1881), mathématicien allemand

2. On considère la suite $(K_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$K_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

Montrer, à l'aide des outils de terminale scientifique, que la suite $(K_n)_{n\geqslant 1}$ converge ; on notera K la limite de cette suite (on ne demande pas de calculer K).

3. On pose pour tout entier naturel n non nul :

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{4^n}\binom{2n}{n}$$

On admet la formule de Stirling [2] :

$$n! \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$

4. Montrer que, pour tout entier n non nul, on a :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 = \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^2}{2\sqrt{n}\sqrt{n+1}}$$

5. En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$a_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

6.
   6.1. Montrer que pour tous réels a et b on a : $(a+b)^2 \geqslant 4ab$.

   6.2. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul :

$$\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^2 \leqslant \frac{1}{4\sqrt{n(n+1)}}$$

7.
   7.1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$0 \leqslant a_{n+1} - a_n \leqslant \frac{1}{8n(n+1)\sqrt{\pi}}$$

   7.2. Montrer que pour tout entier $k \geqslant 1$ et tout entier $p \geqslant k$:

$$0 \leqslant a_p - a_k \leqslant \frac{1}{8k\sqrt{\pi}}$$

   7.3. En déduire que, pour tout entier k non nul :

$$0 \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}} - a_k \leqslant \frac{1}{8k\sqrt{\pi}}$$

2. James Stirling (1692-1770) mathématicien écossais

Partie B : marche aléatoire sur une droite

Soit $(O; \vec{\imath})$ un axe gradué. Dans la suite du problème, tous les instants considérés sont des nombres entiers naturels.

Une particule située sur un point d'abscisse $k \in \mathbb{Z}$ saute à chaque instant sur le point d'abscisse $k+1$ ou sur le point d'abscisse $k-1$, avec la même probabilité.
Chaque saut est indépendant du précédent.

La particule est à l'origine à l'instant $t = 0$.
On note O_k la variable aléatoire égale à 1 si la particule est à l'origine à l'instant $t = k$ et 0 sinon et U_n la variable aléatoire égale au nombre de passages en O de la particule entre les instants 1 et $2n$ $(n \geqslant 1)$.

1. Exprimer la variable U_n en fonction des variables O_k.
2. Pour tout $k \geqslant 1$, montrer que :
   2.1. $P(O_{2k+1} = 1) = 0$;
   2.2. $P(O_{2k} = 1) = \dfrac{1}{4^k}\dbinom{2k}{k} = \dfrac{a_k}{\sqrt{k}}$.
3. Calculer l'espérance mathématique $E(U_n)$ de la variable aléatoire U_n et montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$:
$$E(U_n) = \frac{(2n+1)}{4^n}\binom{2n}{n} - 1$$
4. En déduire un équivalent de $E(U_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie C : marche aléatoire sur un plan

Un plan est rapporté à un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Une particule située sur un point de coordonnées $(k, \ell) \in \mathbb{Z}^2$ saute à chaque instant sur l'un des points de coordonnées $(k+1, \ell+1)$, $(k+1, \ell-1)$, $(k-1, \ell+1)$ ou $(k-1, \ell-1)$ avec la même probabilité (c'est-à-dire qu'à chaque étape, la particule se déplace selon la diagonale d'un carré).
Chaque saut est indépendant du précédent.

La particule est à l'origine à l'instant $t = 0$.
On note O_k la variable aléatoire égale à 1 si la particule est à l'origine à l'instant $t = k$ et 0 sinon et U_n la variable aléatoire égale au nombre de passages en O de la particule entre les instants 1 et $2n$ $(n \geqslant 1)$.

1. Exprimer la variable U_n en fonction des variables O_k.
2. Pour tout $k \geqslant 1$, calculer $P(O_{2k+1} = 1)$ et $P(O_{2k} = 1)$.
3. Montrer que l'espérance de U_n est donnée par :
$$E(U_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{k}$$
4. Montrer que pour tout entier $k \geqslant 1$ on a :
$$\frac{1}{\pi k} - \frac{1}{4\pi k^2} \leqslant \frac{a_k^2}{k} \leqslant \frac{1}{\pi k}$$
5. En déduire un équivalent de $E(U_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Problème 3 : équation de Pell-Fermat

On se propose de déterminer s'il existe des entiers strictement positifs m et n ($m < n$) vérifiant l'égalité :

$$\sum_{k=1}^{m} k = \sum_{k=m}^{n} k$$

1. Montrer que ce problème peut se ramener à la recherche d'entiers x, y, m et n ($0 < m < n$) tels que :

$$\begin{cases} x = 2n + 1 \\ y = 2m \\ x^2 - 2y^2 = 1 \end{cases}$$

On note dans ce qui suit (E) l'équation $x^2 - 2y^2 = 1$ d'inconnue $(x, y) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On range les solutions de (E) dans l'ordre croissant des y.

2. Écrire un algorithme permettant d'obtenir les solutions de (E) pour $y \leqslant 100$.
3. Déterminer la plus petite (au sens de l'ordre choisi) solution de (E).
4.
   4.1. Montrer qu'il existe deux suites d'entiers $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que, pour tout entier n non nul :
   $$(3 + 2\sqrt{2})^n = x_n + y_n\sqrt{2}$$
   4.2. Exprimer x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n.
   4.3. Montrer que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont strictement croissantes et tendent vers $+\infty$.
5. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, (x_n, y_n) est solution de (E).

On se propose de montrer que l'ensemble $S = \{(x_n, y_n), n \in \mathbb{N}^*\}$ est l'ensemble des solutions de l'équation (E).

On suppose qu'il existe des couples (x, y) d'entiers positifs solutions de (E) n'appartenant pas à S et on note (X, Y) le plus petit (au sens de l'ordre choisi) de ces couples.

6. Montrer qu'il existe un unique entier N tel que $y_N < Y < y_{N+1}$.
7. Justifier à l'aide de l'algorithme que $N \geqslant 2$.
8. Montrer que :
$$x_N + y_N\sqrt{2} < X + Y\sqrt{2} < x_{N+1} + y_{N+1}\sqrt{2}$$
9. En déduire que :
$$x_{N-1} + y_{N-1}\sqrt{2} < (3X - 4Y) + (3Y - 2X)\sqrt{2} < x_N + y_N\sqrt{2}$$
10. Montrer que :
    10.1. $3X - 4Y > 0$;
    10.2. $3Y - 2X > 0$;
    10.3. $3Y - 2X < Y$;
    10.4. $(3X - 4Y, 3Y - 2X)$ est solution de (E).
11. Conclure.
12. Donner les cinq premiers couples d'entiers (x, y) (au sens de l'ordre choisi) solutions de (E) puis les valeurs correspondantes de m et n .