Problème 1 : anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$

Notations :

* Pour un ensemble fini F, on note $\text{card}(F)$ son cardinal.
* Pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > 1$, on note $\mathcal{I}_n$ l'ensemble des éléments inversibles de l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ et $\mathcal{N}_n$ l'ensemble des éléments non inversibles.
* Pour a et $b \in \mathbb{Z}$, "a divise b" est noté $a|b$, ce qui équivaut à : $\exists k \in \mathbb{Z},\ b = ka$.
* Pour a et $b \in \mathbb{Z}$, le plus grand commun diviseur dans $\mathbb{N}$ de a et b est noté $a \wedge b$.
* Pour $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par $\overline{a}$ la classe de a dans l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Rappels : on considère $(G, .)$ un groupe fini d'élément neutre 1_G.

* Soit $a \in G$. On appelle ordre de a, que l'on note $\omega(a)$, le plus petit élément de l'ensemble $\left\{k \in \mathbb{N}^* \,/\, a^k = 1_G\right\}$.
  On a alors : $0 < \omega(a) \leqslant \text{card}(G)$ et $a^{\omega(a)} = 1_G$.
* Le groupe G est cyclique si et seulement si il existe $a \in G$ tel que $\text{card}(G) = \omega(a)$.

Éléments inversibles de l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$

1. Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $n > 1$. Démontrer que $\overline{a}$ est inversible dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ si et seulement si $a \wedge n = 1$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > 1$. Montrer que $(\mathcal{I}_n, \times)$ est un groupe commutatif.
3. Sans justification, énumérer, dans un tableau ayant deux rangées, les éléments de $\mathcal{I}_{10}$ avec leurs ordres. Ce groupe $(\mathcal{I}_{10}, \times)$ est-il cyclique ?
4. Sans justification, énumérer, dans un tableau ayant deux rangées, les éléments de $\mathcal{I}_{12}$ avec leurs ordres. Ce groupe $(\mathcal{I}_{12}, \times)$ est-il cyclique ?
5. Pour les algorithmes demandés, on utilisera uniquement les opérations $\times, +, \wedge$ et la fonction de deux variables `reste` où `reste(a,b)` donne le reste de la division euclidienne de a par b pour $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$.

   On pourra également utiliser des boucles de type

   - `for`
   - `while`
   - et la construction `if...then...else...`.

   On précisera le logiciel de calcul formel ou le modèle de calculatrice utilisé.

   5.1. Écrire une procédure `Test( , )` ayant comme arguments deux entiers naturels k et n avec $n > 1$ affichant "1" si $\overline{k} \in \mathcal{I}_n$ et "0" sinon.

   5.2. Écrire une procédure `Card( )` ayant comme argument un entier n avec $n > 1$ affichant le cardinal de $\mathcal{I}_n$.

   5.3. Écrire une procédure `Ord( , )` ayant comme arguments deux entiers naturels k et n avec $n > 1$ affichant la valeur de $\omega\left(\overline{k}\right)$, l'ordre de $\overline{k}$ dans $(\mathcal{I}_n, \times)$, si $\overline{k} \in \mathcal{I}_n$ et `"Erreur"` sinon.

Éléments non inversibles de l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que n est primaire lorsqu'il existe un nombre premier p et $\alpha \in \mathbb{N}^*$ tels que $n = p^\alpha$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > 1$ et n ne soit pas primaire.

   6.1. Établir qu'il existe deux entiers, que l'on notera n_1 et n_2, tels que $n = n_1 n_2$, $1 < n_1 < n$ et $n_1 \wedge n_2 = 1$.

   On pourra utiliser la décomposition en produit de facteurs premiers de n.

   6.2. Montrer alors que $(n_1 + n_2) \wedge n = 1$.

6.3. Établir également que : $\overline{n_1} \notin \mathcal{I}_n$ et $\overline{n_2} \notin \mathcal{I}_n$

7. On considère p un nombre premier et $\alpha \in \mathbb{N}^*$.
   Soit $k \in \mathbb{Z}$. Prouver que : $\overline{k} \in \mathcal{N}_{p^\alpha} \iff p|k$.
8. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > 1$.
   Démontrer que $\mathcal{N}_n$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ si et seulement si n est primaire.

Problème 2 : isométries du plan et de l'espace

On considère $E = \mathbb{R}^n$ (avec $n \in \{2, 3\}$) muni de sa structure canonique d'espace vectoriel euclidien.
Rappels et notations :

- Pour un ensemble fini F, on note $\text{card}(F)$ son cardinal.
- E est muni canoniquement d'une structure affine.
- Une application affine de E est une application $f : E \longrightarrow E$ telle qu'il existe une application linéaire $\varphi : E \longrightarrow E$ vérifiant : pour tout $(A, B) \in E^2$, $\overrightarrow{f(A)f(B)} = \varphi\left(\overrightarrow{AB}\right)$.
  f étant donnée, l'application φ est unique, elle est appelée *partie linéaire* de f et on la note $\overrightarrow{f}$.
- Une isométrie de E est une application $f : E \longrightarrow E$ vérifiant :

$$\text{pour tout } (A, B) \in E^2\,, \quad f(A)f(B) = AB$$

- Une isométrie de E est une application affine de E.
- Si f est une isométrie de E, on dit que f est un déplacement de E lorsque $\det\left(\overrightarrow{f}\right) > 0$.
- On note $Is(E)$ l'ensemble des isométries de E, $Is^+(E)$ l'ensemble des déplacements et $Is^-(E) = Is(E) \setminus Is^+(E)$.
- L'image d'une droite (resp. d'un plan) de E par une isométrie de E est une droite (resp. un plan).
- Une isométrie de E est une bijection de E sur E.
- $(Is(E), \circ)$ est un groupe et $Is^+(E)$ est un sous-groupe de $(Is(E), \circ)$.
- Si $f \in Is^-(E)$ et $g \in Is^-(E)$, alors $f \circ g \in Is^+(E)$.
- Si $f \in Is^+(E)$ et $g \in Is^-(E)$, alors $f \circ g \in Is^-(E)$.
- Pour une isométrie f de E, on note $f^0 = \text{Id}_E$ l'application identité de E, $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$ et f^{-1} la bijection réciproque de f.
- On considère F une partie non vide de E. On note $G(F)$ (respectivement $G^+(F)$) l'ensemble des isométries (respectivement déplacements) de E laissant globalement invariant l'ensemble F.
  Ainsi pour tout $f \in Is(E)$ on a : $f \in G(F) \iff f(F) = F$.
  De plus, on a : $G^+(F) = G(F) \cap Is^+(E)$.
  On définit enfin $G^-(F) = G(F) \setminus G^+(F)$.

Partie A : généralités

1. Soit $f \in Is(E)$.
   Établir que $f \in G(F)$ si et seulement si pour tout $M \in F$, on a $\begin{cases} f(M) \in F \\ f^{-1}(M) \in F \end{cases}$.
2. Montrer que $G(F)$ et $G^+(F)$ sont des sous-groupes de $(Is(E), \circ)$.

3. Soit $s \in Is(E)$ telle que s soit une symétrie.
   Établir que $s \in G(F)$ si et seulement si pour tout $M \in F$, on a $s(M) \in F$.
   On rappelle qu'une symétrie σ de E est une application affine telle que $\sigma \circ \sigma = \mathrm{Id}_E$.
4. On suppose qu'il existe $\varphi \in G^-(F)$. On note $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} G^+(F) & \longrightarrow & G^-(F) \\ f & \longmapsto & \varphi \circ f \end{array} \right.$.
   4.1. Justifier que Φ est une application bien définie.
   4.2. Montrer que Φ est une bijection.
5. Démontrer que si $G(F)$ est fini alors $\mathrm{card}\,(G(F)) = \mathrm{card}\,(G^+(F))$ ou $\mathrm{card}\,(G(F)) = 2\,\mathrm{card}\,(G^+(F))$.

Partie B : exemples dans le plan euclidien

Dans cette partie, on se place dans le cas où $n = 2$ et on désigne par $\mathcal{P}$ le plan $\mathbb{R}^2$ orienté.
On rappelle que $Is^+(\mathcal{P})$ est constitué des rotations et des translations et que les réflexions (symétries orthogonales par rapport à des droites) sont des éléments de $Is^-(\mathcal{P})$.

Un singleton
Soit Ω un point du plan $\mathcal{P}$.

1. On considère une application $f \in Is^-(\mathcal{P})$ telle que $f(\Omega) = \Omega$.
   1.1. Justifier qu'il existe $I \in \mathcal{P}$ tel que $f(I) \neq I$. On appelle r la réflexion ayant pour axe la médiatrice de $[I, f(I)]$.
   1.2. Montrer que $r(\Omega) = \Omega$ puis que $r \circ f = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$.
   1.3. En déduire que f est une réflexion.
2. Démontrer que les éléments de $G(\{\Omega\})$ sont les rotations de centre Ω et les réflexions d'axe passant par Ω.

Une paire
On considère une paire de points du plan, $\mathcal{U} = \{P_1, P_2\}$ où $P_1 \neq P_2$.
On note I le milieu du segment $[P_1, P_2]$.

3. Soit $f \in G(\mathcal{U})$. Montrer que $f(I) = I$.
4. Soit $f \in G^+(\mathcal{U})$ tel que $f \neq \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$. Prouver que f est la symétrie centrale de centre I.
5. Montrer alors que $G(\mathcal{U})$ est formé de quatre éléments : $\mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$, la symétrie centrale de centre I et deux réflexions.

Une ellipse
On munit le plan $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$. Les axes de coordonnées sont notés : (Ox) et (Oy).
On considère l'ellipse Γ d'équation : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ avec $0 < b < a$.
On note $A(a, 0)$ et $A'(-a, 0)$ les sommets principaux de l'ellipse Γ. On note s la symétrie centrale de centre O, r_1 la réflexion d'axe (Ox) et r_2 la réflexion d'axe (Oy), de sorte que, d'après de qui précède :

$$G(\{A, A'\}) = \{\mathrm{Id}_{\mathcal{P}}, s, r_1, r_2\}$$

6. Soit $M \in \mathcal{P}$ de coordonnées (x, y). Donner les coordonnées des points $s(M), r_1(M)$ et $r_2(M)$.
7. Montrer alors que $G(\{A, A'\}) \subset G(\Gamma)$.

On note $\Delta = \{M \in \mathcal{P} \,/\, OM \leqslant a\}$ le disque fermé de centre O et de rayon a et Λ le cercle de centre O et de rayon a.

8. Pour $a = \sqrt{3}$ et $b = 1$, représenter sur un même graphique l'ellipse Γ et le cercle Λ.
9. Établir que $\Gamma \subset \Delta$.
10. Montrer que $\Gamma \cap \Lambda = \{A, A'\}$.
11. Soient P et P' deux points de Γ.
    (a) Montrer que : $PP' \leqslant 2a$.
    (b) Établir de plus que : $PP' = 2a \iff \{P, P'\} = \{A, A'\}$.
12. En déduire que : $G(\Gamma) = G(\{A, A'\})$.

Partie C : étude d'isométries de l'espace

Pour la fin du problème, on se place dans le cas où $n = 3$. On désigne par $\mathcal{E}$ l'espace $\mathbb{R}^3$ orienté muni d'un repère orthonormé direct : $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Les axes de coordonnées sont notés $(Ox), (Oy)$ et (Oz).
On rappelle qu'un automorphisme u de $\mathcal{E}$ est orthogonal si et seulement si pour tout $\overrightarrow{x} \in \mathcal{E}$: $\|u(\overrightarrow{x})\| = \|\overrightarrow{x}\|$ où $\|.\|$ désigne la norme euclidienne de $\mathcal{E}$.
$O(\mathcal{E})$ désigne l'ensemble des automorphismes orthogonaux de $\mathcal{E}$.
On rappelle qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si ${}^tAA = I_3 = A{}^tA$ où ${}^tA$ désigne la transposée de la matrice A.
L'ensemble des matrices orthogonales (resp. orthogonales de déterminant 1) est noté $O_3(\mathbb{R})$ (resp. $SO_3(\mathbb{R})$).

1. Soit $f \in Is(\mathcal{E})$.
   1.1. Montrer que $\overrightarrow{f} \in O(\mathcal{E})$.
   On note alors A la matrice de $\overrightarrow{f}$ dans la base orthonormale directe $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, X, X' et B les matrices colonnes respectives des coordonnées des points $M(x, y, z), M'(x', y', z')$ et $f(O)(\alpha, \beta, \gamma)$ dans le repère $\mathcal{R}$.
   1.2. Montrer que : $f(M) = M' \iff X' = AX + B$.
   (C'est l'expression analytique de f relativement au repère $\mathcal{R}$.)
   1.3. Montrer que : $A \in O_3(\mathbb{R})$ puis que : $f \in Is^+(\mathcal{E})$ si et seulement si $A \in SO_3(\mathbb{R})$.

Pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ on considère les matrices carrées :
$A_0 = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Justifier que pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, on a $A_i \in O_3(\mathbb{R})$.
3. Pour quelles valeurs de $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, a t-on $A_i \in SO_3(\mathbb{R})$?

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère la matrice colonne $B_\lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}$ et on définit les applications t_λ, v_λ, s et r de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ par leur expression analytique :

$$t_\lambda : X' = X + B_\lambda, \qquad v_\lambda : X' = A_1X + B_\lambda, \qquad s : X' = A_2X, \qquad r : X' = A_3X$$

De plus, on note $v = v_0$.
On rappelle que $Is^+(\mathcal{E})$ est constitué des translations, des rotations axiales et des vissages. Les réflexions de $\mathcal{E}$ (symétries orthogonales par rapport à un plan) sont des éléments de $Is^-(\mathcal{E})$.

4. Sans justification, donner la nature des transformations t_λ, v, s et r ainsi que leur(s) élément(s) caractéristique(s).
5. Montrer que $v_\lambda = v \circ t_\lambda = t_\lambda \circ v$ et reconnaître cette transformation en précisant ses éléments caractéristiques.
   On pourra utiliser un calcul matriciel.
6. Soient γ et $\delta \in \mathbb{R}$. Montrer que $v_\gamma \circ v_\delta = t_{\gamma+\delta}$ et que $t_\gamma \circ v_\delta = v_{\gamma+\delta}$.

Partie D : un cylindre à base elliptique

On considère deux réels strictement positifs a et b tels que $a > b$.
On considère le cylindre $\mathcal{C}$ d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

On considère Π le plan d'équation $z = 0$ et Γ l'intersection du cylindre $\mathcal{C}$ et du plan Π.

On remarque que la courbe Γ est l'ellipse d'équation : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ dans $(O;\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$ repère orthonormé du plan Π.

Pour $\theta\in\mathbb{R}$ fixé, on considère la droite d_θ de $\mathcal{E}$ d'équations : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& a\cos(\theta)\\ y &=& b\sin(\theta)\end{array}\right.$.

On va montrer que les éléments de $G(\mathcal{C})$ peuvent s'écrire en composant certaines isométries de la partie précédente.

1. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Montrer que t_λ, v_λ, s et r sont des éléments de $G(\mathcal{C})$.
2. Montrer que $\mathcal{C}=\bigcup_{\theta\in\mathbb{R}} d_\theta$.
3. Soit $\mathcal{D}$ une droite non parallèle à d_0.
   3.1. Établir que $\mathcal{D}$ admet un vecteur directeur $\overrightarrow{u}(\alpha,\beta,\gamma)$ tel que α et β ne sont pas simultanément nuls.
   On pourra commencer par donner un vecteur directeur de d_θ pour $\theta\in\mathbb{R}$.
   3.2. On note $M_0(x_0,y_0,z_0)$ un point de $\mathcal{D}$.
   Donner une équation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ obtenue à l'aide de $\overrightarrow{u}$ et de M_0.
   3.3. Montrer alors que $\mathcal{D}$ coupe $\mathcal{C}$ en au plus deux points.
4. Soit $f\in G(\mathcal{C})$. Déduire de la question précédente que $f(d_0)$ est parallèle à la droite d_0.
5. Soit $f\in G(\mathcal{C})$. Montrer que $\overrightarrow{k}$ est un vecteur propre de $\overrightarrow{f}$.
6. Soit $\varphi\in O(\mathcal{E})$ admettant $\overrightarrow{k}$ comme vecteur propre.
   6.1. Établir que φ admet dans la base $(\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath},\overrightarrow{k})$ une matrice de $O_3(\mathbb{R})$, donnée par blocs, de la forme $\begin{pmatrix} M & & 0\\ & & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon\end{pmatrix}$ où $M\in O_2(\mathbb{R})$ et $\varepsilon\in\{-1,1\}$.
   6.2. Vérifier que $\varepsilon=\det(\varphi)\det(M)$.
7. Soit $f\in G^+(\mathcal{C})$ tel que $f(O)\in\Pi$. On admet que $f(\Pi)=\Pi$.
   On peut donc définir $g:\left\{\begin{array}{ccc}\Pi & \longrightarrow & \Pi\\ M & \longmapsto & g(M)=f(M)\end{array}\right.$, application induite par f sur Π.
   7.1. Établir que g est une isométrie de Π vérifiant $g(\Gamma)=\Gamma$.
   7.2. À l'aide de la partie B, énoncer les quatre possibilités pour g puis en déduire que $f(O)=O$.
   7.3. Écrire les quatre possibilités pour la matrice de $\overrightarrow{g}$ dans la base $(\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$.
   7.4. Vérifier alors que l'on peut trouver i et $j\in\{0,1\}$ tels que $f=v^j\circ s^i$.
   On pourra utiliser l'expression analytique de f et la question 6.
8. Soit $f\in G^+(\mathcal{C})$ tel que $f(O)\notin\Pi$
   On note O' le projeté orthogonal de $f(O)$ sur le plan Π, t la translation de vecteur $\overrightarrow{f(O)O'}$ et $h=t\circ f$.
   8.1. Montrer que $h\in G^+(\mathcal{C})$ et $h(O)\in\Pi$.
   On pourra commencer par justifier que t peut s'écrire $t=t_\mu$ avec $\mu\in\mathbb{R}^*$ et utiliser la question 1.
   8.2. Montrer que l'on peut trouver $\lambda\in\mathbb{R}^*$, i et $j\in\{0,1\}$ tels que $f=t_\lambda\circ v^j\circ s^i$.
9. Soit $f\in G^-(\mathcal{C})$.
   9.1. Établir que $r\circ f\in G^+(\mathcal{C})$.
   9.2. En déduire qu'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$, i et $j\in\{0,1\}$ tels que $f=r\circ t_\lambda\circ v^j\circ s^i$.

Partie E : une hélice.

On reprend dans cette partie les notations de la partie précédente.

On considère l'arc paramétré $M : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ t & \longmapsto & M(t)\,(a\cos(t), b\sin(t), t) \end{array} \right.$

On note $\mathcal{H}$ la trajectoire de cet arc paramétré.

1. Montrer que $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}$.
2. Soit $\mathcal{D}$ une droite telle que $\mathcal{D}$ coupe la courbe $\mathcal{H}$ en au moins trois points.
   Montrer alors qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{D} = d_\theta$.
   On pourra utiliser les questions 2. et 3. de la partie D.
3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que $d_\theta \cap \mathcal{H} = \{M(\theta + 2k\pi) \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$.
4. Soient $f \in G(\mathcal{H})$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $\omega \in \mathbb{R}$ tel que $f(d_\theta) = d_\omega$.
5. En déduire que $G(\mathcal{H}) \subset G(\mathcal{C})$.
6. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que $t_{2k\pi} \in G(\mathcal{H})$.
7. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $t_\lambda \in G(\mathcal{H})$. Prouver qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\lambda = 2k\pi$.
   On pourra utiliser le fait que $t_\lambda\,(M(0)) \in \mathcal{H}$.
8. Justifier brièvement que s et $v_{-\pi} \in G(\mathcal{H})$.
9. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v_\lambda \in G(\mathcal{H})$. Prouver qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\lambda = (2k+1)\pi$.
   On pourra utiliser le fait que $v_\lambda\,(M(0)) \in \mathcal{H}$.
10. Soit f une isométrie de $\mathcal{E}$. Démontrer que :

$$f \in G^+(\mathcal{H}) \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ \exists i \in \{0,1\}\,,\ \begin{cases} f = t_{2k\pi} \circ s^i \\ \quad \text{ou} \\ f = v_{(2k+1)\pi} \circ s^i \end{cases}$$

11. On veut montrer que $G(\mathcal{H}) = G^+(\mathcal{H})$.
    Pour cela, on suppose que $G(\mathcal{H}) \neq G^+(\mathcal{H})$.
    11.1. Démontrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, i et $j \in \{0,1\}$ tels que $r \circ t_\lambda \circ v^j \circ s^i \in G^-(\mathcal{H})$.
    11.2. En déduire que l'on peut trouver un réel noté μ tel que $r \circ t_\mu \in G^-(\mathcal{H})$.
    11.3. Calculer les coordonnées du point $r \circ t_\mu\,(M\,(0))$.
    11.4. En déduire que l'on peut trouver $m \in \mathbb{Z}$ tel que $r \circ t_{2m\pi} \in G^-(\mathcal{H})$.
    11.5. En déduire que $r \in G^-(\mathcal{H})$.
    11.6. Calculer les coordonnées du point $r\left(M\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$.
    11.7. Conclure.
