Ce sujet est composé de deux problèmes indépendants.

Problème n° 1

Ce problème propose d'étudier différentes moyennes de nombres positifs.

Notations
$\mathbb{R}^{+*}$ désigne l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

Partie A : cas de deux nombres

Dans cette partie, on donne les définitions de différentes moyennes de deux nombres positifs et on présente différentes situations internes ou externes aux mathématiques les faisant intervenir.

Définitions
Étant donnés deux nombres réels a et b positifs, on appelle :

- *moyenne arithmétique* de a et b le nombre m défini par $m = \dfrac{a+b}{2}$.
- *moyenne quadratique* de a et b le nombre q défini par $q = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.
- *moyenne géométrique* de a et b le nombre g défini par $g = \sqrt{ab}$.

Lorsque a et b sont strictement positifs, on appelle :

- *moyenne harmonique* de a et b le nombre h défini par $\dfrac{1}{h} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)$.

I. Problème 1 : moyenne des notes

Lors d'un premier contrôle, un élève a obtenu la note de 9 sur 20. Un deuxième contrôle est prévu, avec le même coefficient que le premier.
Quelle est la valeur maximale de la moyenne que cet élève peut obtenir sur ces deux notes ?

II. Problème 2 : évolutions en pourcentage

Entre octobre 2018 et novembre 2018, le prix baril de pétrole brut de la mer du Nord a connu une baisse de 19%.
Entre novembre 2018 et décembre 2018, il a connu une nouvelle baisse de 12%.
Entre décembre 2018 et janvier 2019, il a connu une hausse de 4%.

1. Calculer le taux d'évolution mensuel moyen entre octobre 2018 et décembre 2018, puis entre novembre 2018 et janvier 2019.
2. Quel type de moyenne ce problème met-il en jeu ?

III. Problème 3 : fonte de deux plaques

On dispose de deux plaques métalliques de formes cylindriques, de même épaisseur $e = 20$ cm, mais de rayons différents $R_1 = 30$ cm et $R_2 = 50$ cm. On décide de fondre ces deux plaques pour en fabriquer deux autres, de même épaisseur e et de même rayon R.

1. Calculer R.
2. Quel type de moyenne ce problème met-il en jeu ?

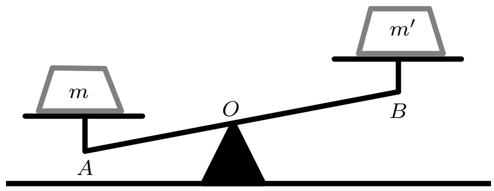
IV. Problème 4 : vitesse moyenne

Un cycliste effectue la montée d'un col à la vitesse constante $v_1 = 20$ km/h. Une fois arrivé au col, il redescend par la même route à la vitesse constante $v_2 = 60$ km/h.

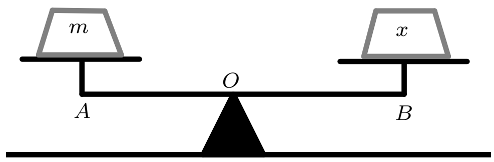
1. Calculer sa vitesse moyenne sur l'ensemble du trajet.
2. Quel type de moyenne ce problème met-il en jeu ?

V. Problème 5 : double pesée

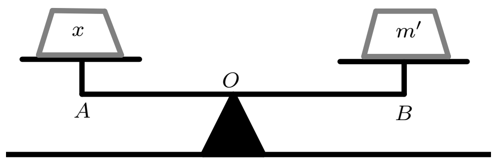
Une loi physique, la loi d'Archimède, permet d'affirmer que la balance ci-dessous est en équilibre si $m \times l = m' \times l'$ où m et m' sont les masses posées sur chaque plateau et l et l' sont respectivement les longueurs OA et OB des deux fléaux de la balance.



On souhaite déterminer la masse x d'un objet. On ne connaît pas les longueurs l et l' et on ne peut pas les mesurer. On dispose en revanche de diverses masses marquées. On réalise une première pesée, où l'équilibre est réalisé pour une masse m, conformément au schéma ci-dessous.



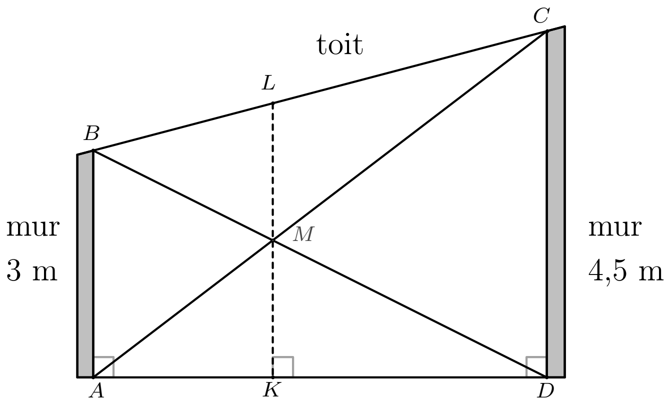
On réalise une seconde pesée, où l'équilibre est réalisé pour une masse m', conformément au schéma ci-dessous.



1. Exprimer x en fonction de m et m'.
2. Quel type de moyenne ce problème met-il en jeu ?

VI. Problème 6 : le problème du bricoleur

Un bricoleur désire faire des travaux dans une pièce schématisée ci-dessous (la figure n'est pas à l'échelle).



Les segments $[AC]$ et $[BD]$ représentent deux échelles posées l'une contre l'autre qui se croisent en M. On pose $a = AB = 3$ m et $b = CD = 4,5$ m. Le bricoleur mesure $1,75$ m et se pose plusieurs questions :

— Peut-il passer sous les échelles sans avoir à se baisser ?

— S'il monte s'installer en M, pourra-t-il rester debout sans atteindre le toit ou devra-t-il s'accroupir ?

— Quelle serait la hauteur d'une cloison joignant les points K et L ?

1. En appliquant le théorème de Thalès à des configurations que l'on précisera, démontrer que :

$$\frac{b}{KM} = 1 + \frac{MC}{MA},$$
$$\frac{a}{ML} = 1 + \frac{MA}{MC},$$
$$\frac{MB}{MD} = \frac{MA}{MC} = \frac{a}{b}.$$

2. Répondre à chacune des questions que se pose le bricoleur.
3. Exprimer KL sous la forme de l'une des moyennes de a et b.

VII. Problème 7 : hauteur d'un triangle rectangle

Dans un triangle AMB rectangle en M, on note H le pied de la hauteur issue de M. On désigne par a la longueur du segment $[HA]$ et b celle du segment $[HB]$.

1. Démontrer que les triangles AHM et MHB sont semblables et en déduire la longueur MH en fonction de a et b.
2. Quel type de moyenne ce problème met-il en jeu ?

Partie B : toutes les moyennes sur une même figure

VIII. Construire une figure d'après la description suivante : soit $[AB]$ un segment de milieu O. Tracer Γ un demi-cercle de diamètre $[AB]$. On considère un point H du segment $[OA]$, distinct de O et de A. La perpendiculaire en H à la droite (AB) coupe le demi-cercle Γ en M. On pose $AH = a$ et $HB = b$. La figure sera complétée au fur et à mesure.

IX. Interprétation géométrique des différentes moyennes

1. Exprimer OM en fonction de a et b. La longueur OM représente une certaine moyenne des nombres a et b. Préciser laquelle.
2. Justifier que $MH^2 = ab$. La longueur MH représente une certaine moyenne des nombres a et b. Préciser laquelle.
3. Soit Γ' le demi-cercle de centre O passant par H qui coupe le segment $[OM]$. La perpendiculaire en O à la droite (OM) coupe Γ' en G. Exprimer OG en fonction de a et b.
4. En déduire une expression de MG en fonction de a et b. La longueur MG représente une certaine moyenne des nombres a et b. Préciser laquelle.
5. On considère le point N du segment $[OM]$ tel que $MN = MH$. La parallèle à la droite (AB) passant par N coupe le segment $[MH]$ en K. Exprimer MK en fonction de a et b. La longueur MK représente une certaine moyenne des nombres a et b. Préciser laquelle.
6. Ordonner les quatre longueurs MO, MH, MG et MK en justifiant l'ordre.

Partie C : moyenne associée à une fonction

X. Soit F une fonction continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}^{+*}$.

1. Démontrer que, pour tous nombres réels strictement positifs a et b, il existe un unique nombre strictement positif, noté α_F tel que

$$F(\alpha_F) = \frac{F(a) + F(b)}{2}.$$

Déterminer quatre fonctions F_1, F_2, F_3, F_4 continues et strictement monotones sur $\mathbb{R}^{+*}$ telles que, pour tous nombres réels a et b strictement positifs,

$$m = \alpha_{F_1}, \qquad q = \alpha_{F_2}, \qquad g = \alpha_{F_3}, \qquad h = \alpha_{F_4}.$$

2. Représenter graphiquement, sur quatre graphiques différents, les fonctions F_1, F_2, F_3, F_4. Pour chaque représentation graphique, indiquer, pour deux nombres strictement positifs a et b donnés, où se situe le point α_{F_i}.

Partie D : moyennes de n nombres positifs

On généralise les définitions de la partie A au cas de n nombres réels positifs et on se propose de comparer ces différentes moyennes.

Définitions

Étant donnés un entier naturel $n \geqslant 2$ et n nombres réels $a_1,\ a_2,\ \dots a_n$ positifs, on appelle :

- *moyenne arithmétique* de $a_1,\ a_2, \dots a_n$ le nombre $m = \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$,
- *moyenne quadratique* de $a_1,\ a_2, \dots a_n$ le nombre $q = \sqrt{\dfrac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n}}$,

– *moyenne géométrique* de $a_1,\ a_2, \dots a_n$ le nombre $g = \sqrt[n]{a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n}$.
Lorsque $a_1,\ a_2, \dots a_n$ sont strictement positifs, on appelle :

– *moyenne harmonique* de $a_1,\ a_2, \dots a_n$ le nombre strictement positif h tel que

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right).$$

XI. Comparaison entre m et q

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $a_1,\ a_2,\ \dots a_n$ des nombres réels positifs.

1. Démontrer par récurrence sur n que :

$$n\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_i - a_j)^2.$$

2. En déduire l'inégalité $m \leqslant q$.

3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $m = q$.

XII. Comparaison entre m et g

1. Démontrer que, pour tout nombre réel x strictement positif, $\ln x \leqslant x - 1$.

2. Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $a_1,\ a_2,\ \dots a_n$ des nombres réels strictement positifs.

a. En appliquant successivement l'inégalité précédente aux nombres $\dfrac{a_i}{m}$, démontrer que $g \leqslant m$.

b. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $g = m$.

XIII. Comparaison entre g et h

On se place dans les mêmes conditions qu'à la question **XII.2.**

1. En appliquant l'inégalité entre moyenne géométrique et moyenne arithmétique à des nombres bien choisis, comparer g et h.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $g = h$.

Partie E : moyennes de variables aléatoires

On rappelle qu'une variable aléatoire X sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ fini suit une loi de Bernoulli de paramètre p si elle prend comme valeurs 1 et 0 avec les probabilités $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$.
Dans toute cette section, $X_1,\ X_2, \dots X_n$ désignent n variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p.

On pose $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ et $F_n = \dfrac{1}{n}S_n$.

XIV. Calculer l'espérance et la variance de X_1.

XV. Étude des variables aléatoires S_n et F_n

1. Calculer l'espérance et la variance de la variable S_n.
2. Que représente la variable S_n ? Rappeler sa loi de probabilité.
3. Calculer l'espérance et la variance de la variable F_n.
4. Que représente la variable F_n ? Déterminer sa loi de probabilité.

XVI. 1. **Inégalité de Markov**

Soit Y une variable aléatoire positive définie sur Ω. On note $E(Y)$ son espérance. En décomposant $Y(\Omega) = Y_1 \cup Y_2$, avec

$$Y_1 = \{y \in Y(\Omega),\ y \geqslant a\}, \qquad Y_2 = \{y \in Y(\Omega),\ y < a\},$$

démontrer que, pour tout nombre réel a strictement positif,

$$P(Y \geqslant a) \leqslant \frac{E(Y)}{a}.$$

2. **Inégalité de Bienaymé-Tchebychev**

Soit X une variable aléatoire définie Ω. On note $E(X)$ son espérance et $V(X)$ sa variance.

Démontrer que, pour tout nombre réel a strictement positif,

$$P(|X - E(X)| \geqslant a) \leqslant \frac{V(X)}{a^2}.$$

3. On reprend les notations de l'introduction de la partie E.

   a. Démontrer que, pour tout réel ϵ strictement positif,

$$P\left(|F_n - p| \geqslant \epsilon\right) \leqslant \frac{1}{4n\epsilon^2}.$$

   b. Expliquer comment, lorsque p est inconnu, cette inégalité permet d'en fournir une estimation. Comment s'appelle le théorème sous-jacent ?

XVII. Application

Un problème historique dû au Chevalier de Méré est rapporté dans la correspondance entre Pascal et Fermat. Grand joueur, le chevalier de Méré s'intéressait aux jeux de hasard sur lesquels il misait de l'argent. À l'issue de nombreuses parties, il avait constaté avoir plus d'une chance sur deux d'obtenir au moins une fois un six en lançant quatre fois un dé à six faces et moins d'une chance sur deux d'obtenir au moins un double-six en lançant 24 fois deux dés. Ce résultat lui semblait en contradiction avec l'égalité des rapports $\frac{24}{36}$ et $\frac{4}{6}$ du nombre de lancers au nombre de faces.

1. Calculer la probabilité d'obtenir au moins un six à l'issue de 4 lancers d'un dé.
2. Calculer la probabilité d'obtenir au moins un double-six à l'issue de 24 lancers de deux dés.
3. A-t-on plus ou moins d'une chance sur deux d'obtenir au moins un six en lançant quatre fois un dé à six faces ?
4. A-t-on plus ou moins d'une chance sur deux d'obtenir au moins un double-six en lançant vingt-quatre fois deux dés à six faces ?

5. Le texte ci-dessous reproduit l'extrait d'une lettre adressée par Fermat à Pascal en 1654.

« Monsieur,

Je n'ai pas eu le temps de vous envoyer la démonstration d'une difficulté qui étonnait fort M. de Méré. Il me disait donc qu'il avait trouvé fausseté dans les nombres par cette raison : si on entreprend de faire un six avec un dé, il y a avantage de l'entreprendre en 4, comme de 671 à 625. Si on entreprend de faire un double six avec deux dés, il y a désavantage de l'entreprendre en 24. Et néanmoins 24 est à 36 (qui est le nombre des faces de deux dés) comme 4 à 6 (qui est le nombre des faces d'un dé). Voilà quel était son grand scandale qui lui faisait dire hautement que les propositions n'étaient pas constantes et que l'arithmétique se démentait : mais vous en verrez bien aisément la raison par les principes où vous êtes. »

Expliquer comment ce texte historique pourrait être utilisé en classe pour illustrer les réponses aux questions **3.** et **4.** Quelle est l'erreur de raisonnement commise par le Chevalier de Méré ?

6. En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer au bout de combien de répétitions d'un lancer de quatre dés, la fréquence d'apparition d'au moins un six est supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$ avec une probabilité supérieure ou égale à $0,95$.

7. En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer au bout de combien de répétitions d'un lancer de vint-quatre dés, la fréquence d'apparition d'au moins un double-six est inférieure ou égale à $\frac{1}{2}$ avec une probabilité supérieure ou égale à $0,95$.

8. Quels commentaires vous inspirent ces résultats ?

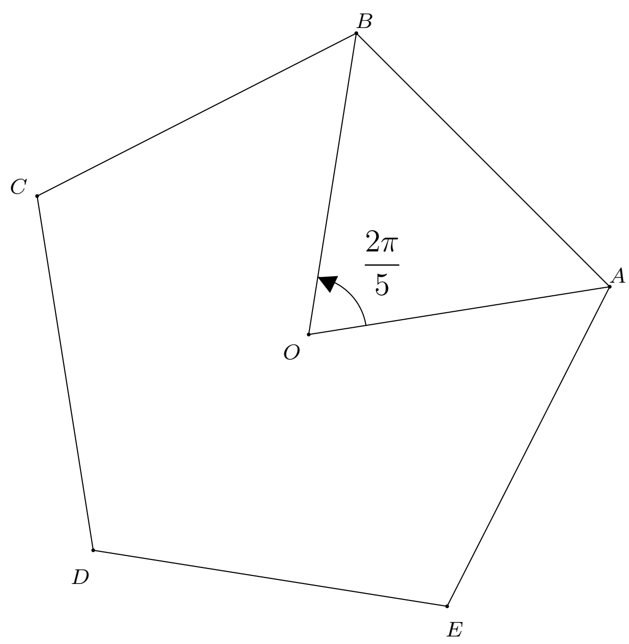
Problème n° 2

Notations
$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}^{+*}$ désigne l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

On se place dans un plan euclidien orienté d'origine O. Si $M_1,\ M_2,\ M_3$ sont trois points distincts du plan, on note $\widehat{M_1M_2M_3}$ l'angle orienté $(\overrightarrow{M_2M_1}, \overrightarrow{M_2M_3})$. Les mesures de tous les angles considérés sont exprimées en radian. On note r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{5}$.

Partie A : pentagones réguliers

Les sommets $A,\ B,\ C,\ D,\ E$ d'un pentagone régulier convexe de centre O sont définis par $A \neq O\ ;\ B = r(A)\ ;\ C = r(B)\ ;\ D = r(C)\ ;\ E = r(D)$.



I. Côtés, angles et diagonales d'un pentagone régulier convexe

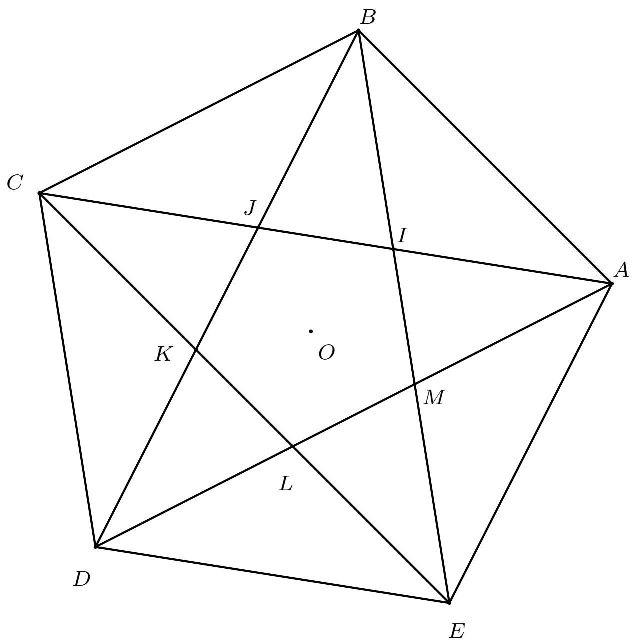
1. **a.** Démontrer que $r(E) = A$.

b. Justifier que les côtés du pentagone $ABCDE$ sont tous de même longueur et que ses angles au sommet sont tous de même mesure.

c. Démontrer que cette mesure est égale à $\dfrac{3\pi}{5}$.

On pourra utiliser les angles du triangle OAB. Toutes les justifications sont attendues.

Les segments $[AC],\ [BD],\ [CE],\ [DA]$ et $[EB]$ sont appelés *diagonales* du pentagone $ABCDE$. Les points $I,\ J,\ K,\ L,\ M$ sont définis conformément au schéma ci-dessous :



2. Démontrer que les diagonales du pentagone $ABCDE$ sont toutes de même longueur.

II. Un second pentagone régulier convexe

1. Démontrer que $r(I) = J$, puis que $IJKLM$ est un pentagone convexe régulier de centre O.
2. En déduire les mesures des angles $\widehat{IJB}$ et $\widehat{BIJ}$, puis celles de l'angle $\widehat{JBI}$.
3. Déterminer la valeur de l'angle $\widehat{IBA}$ (le résultat obtenu sera démontré).
4. Démontrer que le triangle ABJ est isocèle de sommet A.
5. Écrire les trois cas d'égalité des triangles tels que vous les feriez figurer dans la trace écrite d'un élève du cycle 4.
6. Démontrer que les triangles AIM, BJI, CKJ, DLK et EML sont égaux.
7. Démontrer que les triangles ABC et BJC sont semblables.

III. Un rapport particulier

On note φ le rapport $\dfrac{AC}{AB}$.

1. Démontrer que $\varphi = 1 + \dfrac{1}{\varphi}$.
2. Calculer la valeur de φ.
3. Démontrer que φ est un nombre irrationnel.

Partie B : Fractions continues

L'objectif de cette partie est de déterminer une suite de nombre rationnels qui converge vers φ et d'en estimer la vitesse de convergence.
Si, dans l'égalité $\varphi = 1 + \dfrac{1}{\varphi}$, on substitue au φ du second membre l'expression $1 + \dfrac{1}{\varphi}$, on

obtient $\varphi = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\varphi}}$. En remplaçant à nouveau le φ du second membre par $1 + \dfrac{1}{\varphi}$, on obtient $\varphi = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\varphi}}}$. Ce procédé itératif suggère l'écriture de φ sous la forme

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}$$

On se propose de formaliser cette écriture à l'aide d'une suite convergeant vers φ.
Pour cela, on note f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ et on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

IV. Définition et premières valeurs

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, u_n est bien défini et est strictement positif.

2. Donner, sous forme de fractions, les valeurs de $u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ u_5$.

3. Démontrer que, pour tout entier naturel n, u_n est un nombre rationnel.

4. Représenter sur un même graphique la fonction f, le nombre φ et les six premières valeurs de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

V. Convergence

1. Si on suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, quelle est la valeur de sa limite ?

2. Démontrer que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par φ et que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par φ.

3. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

VI. Deux suites d'entiers

On définit deux suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $p_0 = q_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$\begin{cases} p_{n+1} = p_n + q_n \\ q_{n+1} = p_n. \end{cases}$$

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, p_n et q_n sont des nombres entiers strictement positifs.

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n$.

3. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $\dfrac{p_n}{q_n}$ est la fraction irréductible égale à u_n.

4. Démontrer que les deux suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont strictement croissantes.

5. Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$,

$$q_{n+1} > 2q_{n-1}.$$

6. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $|u_n - \varphi| < |u_{n+1} - u_n| \leqslant 2^{-n}$.

7. Écrire une fonction Python qui prend en argument un nombre ε strictement positif et qui renvoie deux listes finies d'entiers $[p_0, p_1, \cdots p_{n_0}]$, $[q_0, q_1, \cdots q_{n_0}]$ telles que $\dfrac{p_{n_0}}{q_{n_0}}$ soit une valeur approchée de φ à ε près.